Jejak Publisher

Make Your Own Mark

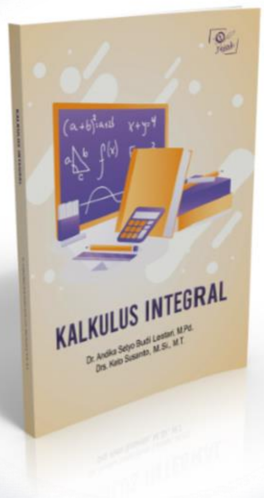
Piagam Penghargaan

Nomor : 0635/RWD/JEJAK/VII/2022

DIBERIKAN KEPADA:

PENULIS

Jejak Publisher



Dr. Andika Setyo Budi Lestari, M.Pd.

SEBAGAI

PENULIS

Kalkulus Integral

ISBN 978-623-338-804-7

Semoga catatan yang ditorehkan menjadi jejak aksara kebaikan dalam hidup

Sukabumi, 24 Juni 2022

Direktur Utama Jejak Publisher

Jejak

Yoga Permana Wijaya

KALKULUS INTEGRAL

Dr. Andika Setyo Budi Lestari, M.Pd.
Drs. Keto Susanto, M.Si., M.T.

CV Jejak, 2022

Kalkulus Integral

Penulis:
Dr. Andika Setyo Budi Lestari, M.Pd.
Drs. Kato Susanto, M.Si., M.T.

ISBN 978-623-338-804-7
ISBN 978-623-338-805-4 (PDF) ; Edisi Digital, 2022

Editor:
Dr. Andika Setyo Budi Lestari, M.Pd.

Penyunting dan Penata Letak:
Tim CV Jejak

Desain Sampul:
Meditation Art

Penerbit:
CV Jejak, anggota IKAPI

Redaksi:
Jln. Bojong genteng Nomor 18, Kec. Bojong genteng
Kab. Sukabumi, Jawa Barat 43353
Web : www.jejakpublisher.com
E-mail : publisherjejak@gmail.com
Facebook : Jejak Publisher
Instagram : @publisherjejak
Twitter : @JejakPublisher
WhatsApp : +6281774845134

Cetakan Pertama, Juni 2022
103 halaman, 14 x 20 cm

Kata Pengantar

Alhamdulillah, puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT berkat keridhoan-Nya sehingga penulis dan tim dapat menyelesaikan buku Kalkulus Integral. Terima kasih yang sebesar-besarnya kami sampaikan kepada seluruh Tim yang membantu menyelesaikan penulisan buku kalkulus integral dan seluruh pihak yang telah memberikan dukungan.

Tim dalam penulisan buku ini adalah mahasiswa dari prodi pendidikan matematika. Tim penulis diantaranya adalah Rica Camelia, Qurrotul A'yun, Rahma Fadilla, Wahyuni Maulida, Lailly Rahma Dianilla, Nayla Aurora, Deva Laudha Fitriyanti, Nursita Amalia, Eka Nur Izzah, Irma Firnadika, Nia Aisyiah, Dewi Rizki Noviyanti.

Buku ini ditulis sebagai salah satu acuan dalam kegiatan perkuliahan Kalkulus Integral. Buku ini jauh dari kata sempurna. Jika ada kurang atau salah dalam bentuk apapun penulis mohon maaf sebesar-besarnya. Penulis dengan senang hati akan menerima masukan, saran dan kritik yang disampaikan.

Pasuruan, April 2022

Penulis

Daftar Isi

BAB 1

INTEGRAL TAK TENTU

A. Pengertian

Integral adalah suatu bentuk pada operasi matematika yang menjadi kebalikan atau biasa juga disebut sebagai invers dari operasi turunan. Serta limit dari jumlah maupun suatu luas daerah tertentu. Integral tak tentu (bahasa Inggris: indefinite integral) atau antiderivatif adalah suatu bentuk operasi pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru. Fungsi ini belum memiliki nilai pasti (berupa variabel) sehingga cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tak tentu ini disebut "integral tak tentu".

B. Rumus Umum Integral

Berikut ini adalah rumus umum yang ada pada integral:

$$\int a\,x^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

- **Pengembangan Rumus Integral**

$$\int (ax+b)^n = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

Mari perhatikan baik-baik contoh dari beberapa turunan dalam fungsi aljabar di bawah ini:

- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 8$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 17$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 - 6$ adalah $y' = 3x^2$

C. Sifat Integral

Sifat-sifat dari integral antara lain:

- $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$ (dengan k adalah konstanta)
- $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

D. Integral Tak Tentu Subsitusi

Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah integral tidak tertentu adalah metode substitusi. Metode ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teknik Integral Substitusi Dalam Fungsi Aljabar

Pada teknik ini, bentuk fungsi f(x) dapat diubah menjadi bentuk $k \cdot (g(x))^n \cdot g^1(x)$. Perhatikan bahwa jika U = g(x), maka $\frac{dU}{dx} g^1(x)$ atau $dU = g^1(x)\,dx$

Jika : $\int f(x)\,dx = k \cdot \int (g(x))^n \cdot g^1(x)dx$

Maka, integral ini dapat diselesaikan dengan memisalkan U = g(x) dan $U = g^1(x)dx$ sehingga diperoleh persamaan:

$$\int f(x)\,dx = k \cdot \int (g(x))^n \cdot g^1(x)dx = k \cdot \int (U)^n \cdot dU$$

$$= \frac{k}{n+1} U^{(n+1)} + C$$

untuk $n \neq -1$

Jika saja $n = -1$, maka:

$$k \cdot \int (U)^{-1} \cdot dU = \ln U + C$$

Sebagai contoh:
Jika $f(x) = (x^4 + 5)^3 x^3$, untuk mendapat integralnya dengan memisalkan:

$$x^4 + 5 = U \text{ dan } \frac{dU}{dx} = 4x^3$$

sehingga $x^3 dx = \frac{1}{4} dU$
Berdasarkan permisalan ini, maka persamaan integralnya menjadi:

$$\int (x^4 + 5)^3 x^3 \, dx = \int (U)^3 \cdot \frac{1}{4} dU = \frac{1}{16} U^4 + C$$

Jika hasil integral diatas disubstitusi dengan permisalan U di peroleh:

$$\frac{1}{16} U^4 + C = \frac{1}{16}(x^4 + 5)^4 + C$$

Contoh diatas merupakan teknik substitusi pada integral tak tentu. Pada integral tertentu yang memiliki nilai pada interval $a \leq b \leq c$ tertentu, maka interval tersebut harus disubstitusi ke dalam interval baru untuk variabel U. Sebagai contoh jika $\int_0^1 (x^4 + 5)^3 x^3 \, dx$, untuk mendapat integralnya dengan memisalkan:

$x^4 + 5 = U$ dan $\frac{dU}{dx} = 4x^3$

Sehingga $x^3 \, dx = \frac{1}{4} dU$

Untuk menciptakan persamaan integral dalam U, maka interval $0 \leq x \leq 2$ dirubah menjadi :

- $x = 0 \rightarrow U = x^4 + 5 = 0^4 + 5 = 5$
- $x = 2 \rightarrow U = x^4 + 5 = 2^4 + 5 = 21$

Berdasarkan permisalan ini, maka persamaan integralnya menjadi:

$$\int_0^2 (x^4 + 5)^5 x^3\, dx = \int_5^{21} (U)^5 \cdot \frac{1}{4}\, dU$$

$$= \left[\frac{1}{24} U^6\right]_5^{21} = \frac{1}{24} 21^6 - \frac{1}{24} 5^6$$

$$= \frac{1}{24}(194481 - 625) = 12116$$

E. Integral Tak Tentu Parsial

Dalam pengintegralan, selain operasi biasa atau dengan teknik substitusi, ada teknik lain yaitu integral parsial. Teknik ini digunakan jika pada teknik sebelumnya tidak bisa digunakan. Teknik ini merupakan integral dari turunan hasil kali dua fungsi. Berikut ini adalah konsep integral parsial:

Jika y = U(x) . V(x), maka:

$$\frac{dy}{dx} = V(x) \cdot U'(x) + U(x) \cdot V'(x)$$

$$dy = V(x) \cdot U'(x) dx + U(x) \cdot V'(x)\, dx$$

Jika y diganti UV maka:

$$d(UV) = V(x) \cdot U'(x)\, dx + U(x) \cdot V'(x)\, dx$$

Karena diketahui bahwa $U'(x)dx = dU$
dan $V'(x)dx = dV$, maka persamaan menjadi:

$$d(UV) = V \cdot dU + U \cdot dV$$

$$U \cdot dV = d(UV) - V \cdot dU$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas dalam persamaan diatas, diperoleh:

Rumus integral parsial:

$$\int U \cdot dV = UV - \int V \cdot dU$$

Perlu diperhatikan untuk memilih U dan dV yang tepat agar pengintegralan memberikan hasil. (dV) harus dipilih yang dapat diintegralkan dengan rumus, sedangkan yang lain menjadi U.

Dalam integral parsial, terkadang bisa menurunkan U dan mengintegralkan dV secara berulang. Jika terjadi proses yang berulang, maka proses dapat diringkas. Sebagai contoh $\int x^2 \cos x \, dx$ adalah:

x^2	$\cos x\ dx$	
$2x$	$\sin x$	$+$
2	$-\cos x$	$-$
0	$-\sin x$	$+$
Diturunkan hingga 0	Diintegralkan hingga sisi kiri 0	

Maka diperoleh hasil:

$$\int x^2 \cos x\,dx = (x^2 \cdot \sin x) - (2x \cdot -\cos x) + (2 \cdot -\sin x) + C$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Contoh Soal Integral Substitusi dan Parsial dan Pembahasan

Contoh Soal 1

Tentukanlah hasil dari $\int \cos^3 2x \sin 2x\,dx$

Pembahasan 1

Misalkan $U = \cos 2x$ dan $\frac{dU}{dx} = -2\sin 2x$, maka

$$dU = -2\sin 2x\,dx$$
$$-\frac{dU}{2} = \sin 2x\,dx$$

Sehingga,

$$\int \cos^3 2x \sin 2x\,dx = \int U^3\left(-\tfrac{1}{2}\right)dU = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{u^4}{4}\right) = -\frac{u^4}{8}$$

Kemudian $-\frac{u^4}{8}$ disubstitusi dengan nilai U menjadi :

$$-\frac{U^4}{8} = -\frac{\cos^4 2x}{8}$$

Contoh Soal 2

Tentukan hasil dari $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

Pembahasan 2:

Misalkan trigonometrinya adalah:

Nilai $x = 3\tan\theta$ dan $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$ dan $x^2 = 9\sec^2\theta$.

Sehingga:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}} 3\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{3\sec\theta} 3\sec^2\theta\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Dengan segitiga diatas, nilai sec dan tan bisa diketahui.

Sehingga:

$$\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right| + C = \ln|x + \sqrt{9+x^2}| - \ln|3| + C.$$

F. PARSIAL

Integral Parsial adalah kaidah yang mengubah integral perkalian fungsi menjadi bentuk lain, yang diharapkan lebih sederhana. Ini digunakan kalau metode substitusi sederhana tidak bisa digunakan.

$$(uv)' \to u'v + uv'$$
$$d\,(uv) = du\,.\,v + u\,.\,dv$$
$$\int d\,(uv) = \int (du\,.\,v + u\,.\,dv)$$
$$uv = \int du\,.\,v + \int u\,.\,dv$$
$$u\,.\,v = \int v\,.\,du + \int u\,.\,dv$$
$$u\,.\,v - \int v\,.\,du = \int u\,.\,dv$$
$$\boxed{\int u\,.\,dv = uv - \int v\,.\,du}$$
(dv selalu diikuti dx)

Contoh :

1. $\int x\,e^x\,dx$

<u>Cara 1</u>

$$u = x \to \frac{du}{dx} = 1$$
$$du = dx$$
$$dv = e^x\,dx$$
$$\int dv = \int e^x\,dx$$
$$v = e^x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \boxed{\int e^x\,dx}$$
Ini digunakan karena lebih mudah dari soal
$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c$$

Cara 2

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x \rightarrow du = e^x\,dx$

$dv = x\,dx$

$\int dv = \int x\,dx$

$v = \frac{1}{2}x^2$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\,e^x\,dx = e^x.\frac{1}{2}x^2 - \boxed{\int \frac{1}{2}x^2\,e^x\,dx}$

ini tidak digunakan karena lebih susah dari soal

2. $\int x \cos x\,dx$

Cara 1

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$du = -\sin x\,dx$

$dv = x\,dx$

$\int dv = \int x\,dx$

$v = \frac{1}{2}x^2$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\,\cos x\,dx = \cos x\,.\frac{1}{2}x^2 - \boxed{\int \frac{1}{2}x^2\,.-\sin x\,dx}$

ini tidak digunakan karena lebih susah dari soal

Cara 2

$u = x$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$dv = \cos x \, dx$

$\int dv = \int \cos x \, dx$

$v = \sin x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \boxed{\int \sin x \, dx}$

lebih mudah dari soal

$\int x \cos x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + c$

$= x \sin x + \cos x + c$

3. $\int x \cos (1 - x^2) \, dx$

Misal : $n = 1 - x^2$

$\frac{dn}{dx} = -2x$

$dn = -2x \, dx \quad (\times \frac{1}{2})$

$-\frac{1}{2} \, dn = x \, dx$

$\int \cos n \,. -\frac{1}{2} \, dn = -\frac{1}{2} \int \cos n \, dn$

$= -\frac{1}{2} \sin n + c$

$= -\frac{1}{2} \sin (1 - x^2) + c$

4. $\int e^x \sin x \, dx$

<u>cara 1</u>

$u = e^x$

$du = e^x \, dx$

$dv = \sin x \, dx$

$v = -\cos x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int -\cos x \, e^x \, dx$

$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int \boxed{e^x \cos x \, dx}$

apabila $u = e^x$ maka U juga e^x

- $U = e^x \rightarrow dU = e^x dx$

  $V = \sin x \rightarrow dV = \cos x \, dx$

$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x \quad (\times \frac{1}{2})$

$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \{-e^x \cos x + e^x \sin x\} + c$

<u>Cara 2</u>

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$dv = e^x dx$

$v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin - \int e^x \cos x\,dx$$

- $U = \cos x \rightarrow dU = -\sin x\,dx$
  $dV = e^x\,dx \rightarrow V = e^x$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x - \sin x\,dx\right)$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x \qquad \left(\times \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\left[\,e^x \sin x - e^x \cos x\,\right] + c$$

5. $\int \ln x\,dx$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = dx$

$v = x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \ln x\,dx = x\,\ln x - \int x\,.\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \ln x\,dx = x\,\ln x - x + c$$

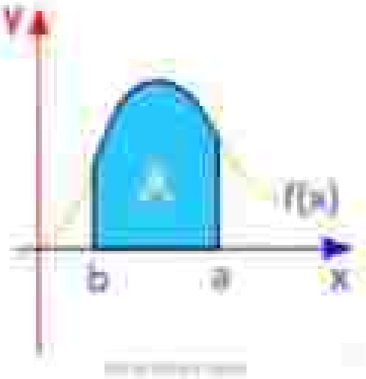
BAB 2

INTEGRAL TENTU

Integral tentu adalah **integral yang udah ditentukan nilai awal dan akhirnya,** ada rentang a-b. Nah, a-b merupakan batas atas dan bawah. Integral tentu ini digunakan untuk menghitung luas daerah yang tidak beraturan

Bentuk Integral Tentu :

$$\int_b^a f(x)dx$$



Sifat Integral Tentu :

1. $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$
2. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, maka $F(a) - F(b)$
$= -(F(b) - F(a))$
4. $\int_a^a = 0$ atau $F(a) - F(a) = 0$
5. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b Fg(x)dx$

Pada Integral Tentu tidak boleh ditambah dengan C

Contoh Soal:

1. Temukan $\int_1^2 3x^2 dx$

   Jawab

   $f(x) = 3x^2 h$

   Dengan definit integral, maka diperoleh

   $f(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = x^3$

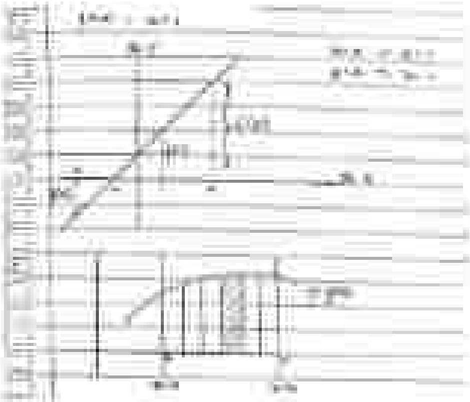
   Lalu substitusikan batas atas dan bawahnya ke dalam hasil $f(x) = x^3$

   Batas atas 2 maka $f(2) = 2^3 = 8$

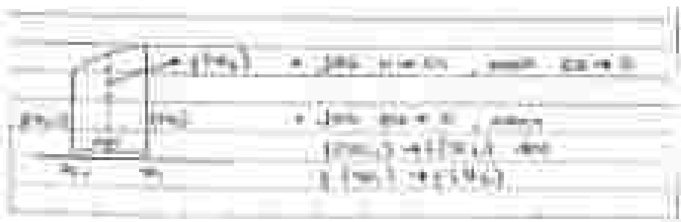
   Batas bawah 1 maka $f(1) = 1^3 = 1$

   $$\int_1^2 3x^2 dx = f(2) - f(1) = 8 - 1 = 7$$

A. Menghitung Luas Daerah Yang Tidak Beraturan

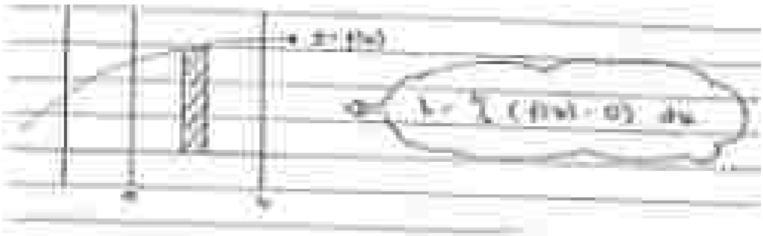


Mula – mula $a < x < b$ dibagi menjadi n bagian yang sama, masing – masing sebesar Δx dengan ketentuan $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. Melalui $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dibuat garis sejajar sumbu y dan memotong kurva $y = f(x)$. Perhatikan sector ke-i

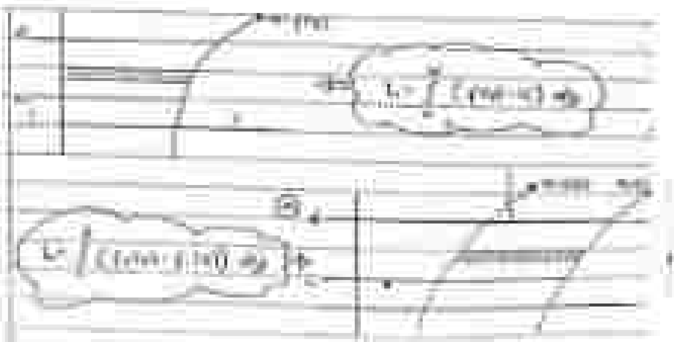


$$
\begin{aligned}
\text{Luas i} = L_i &= f(x_{ti}) \cdot \Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{ti}) \cdot \Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

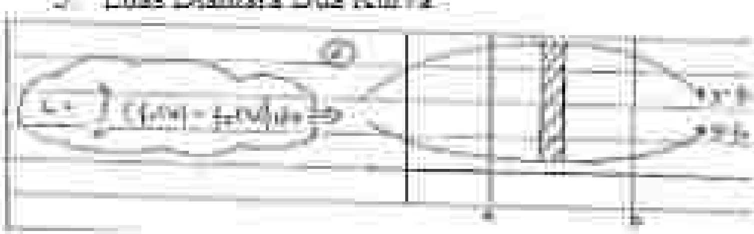
1. Luas Terhadap Sumbu x



2. Luas Terhadap Sumbu y



3. Luas Diantara Dua Kurva



Contoh Soal

1. $y = 2x + 6.\ terhadap\ sumbu\ x\ dan\ sumbu\ y$

   $L = \int_{-3}^{0} (2x + 6)\,dx$

   $= (x^2 + 6x)\Big|_{-3}^{0}$

   $= (0 + 0) - (9 - 18)$

   $= 9$

   $L = \int_{0}^{6} \left(0 - \left(\frac{1}{2}y - 3\right)\right) dy$

   $= \int_{0}^{6} \left(-\frac{1}{2}y + 3\right) dy$

   $= \left(-\frac{1}{4}y^2 + 3y\right)\Big|_{0}^{6}$

   $= (-9 + 18) - (0 - 0)$

   $= 9$

B. MENCARI LUAS DAERAH FUNGSI KUADRAT

FUNGSI KUADRAT =>

$y = ax^2 + bx + c$

$a \neq 0$

$D = b2 - 4ac$

$x = ay^2 + by + c$

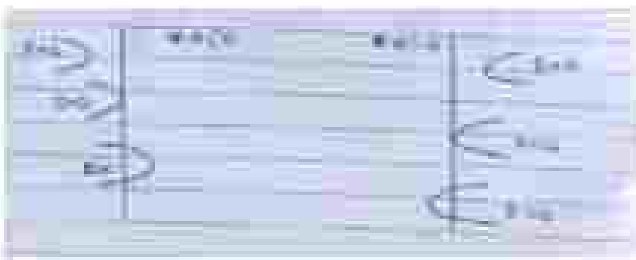
$a \neq 0$

$D = b2 - 4a$

Gambar: Parabola

- Kedudukan fungsi kuadrat terhadap sumbu x

- Kedudukan fungsi kuadrat terhadap sumbu y



Tips:

a) Memperhatikan nilai a ($a > 0$) atau ($a < 0$)
b) Mencari nilai D ($D < 0$; $D = 0$; $D > 0$)
c) Menentukan kedudukan titik – titik pembentuk parabola pada diagram cartesius ($y = 0$; $x = 0$)
d) Mencari luas daerah dengan batas – batas yang sudah ditemukan (cara ke-3)

Tips tambahan:

- Mencari titik potong (guna menentukan batas – batas)
- Gambar! (wajib)

Contoh soal:

1. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 2x - 3$ dan sumbu x!

   Jawab:

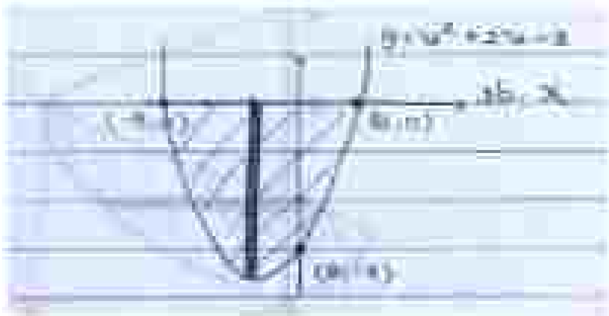
   - $a > 0$
   - $D = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$
   - $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

   ■ $x = 0 \Rightarrow y = -3$

   $(x + 3)(x - 1) = 0$

   $x = -3 \quad x = 1$

   $y = x^2 - 2x = 3$



$$L = \int_{-3}^{1} \{0 - (x^2 + 2x - 3)\}\, dx$$
$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx$$
$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)\Big|_{-3}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9)$$
$$= 1\frac{2}{3} + 9$$
$$= 10\,\frac{2}{3}$$

Catatan :

- Syarat penentu sektor yaitu harus melibatkan semua batas

2. $x = y^2 - 2y$ dan $x = 6y - y^2$

Jawab:

$x = y^2 - 2y$

$a > 1$

$D = 4 > 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$y\,(y - 2) = 0$

$y = 0 \quad y = 2$

$x = 6y - y^2$

$a < 0$

$D = 36 > 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow 6y - y^2 = 0$

$y\,(6 - y) = 0$

$y = 0 \vee y = 6$

Mencari Titik potong

$y^2 - 2y = 6y - y^2$

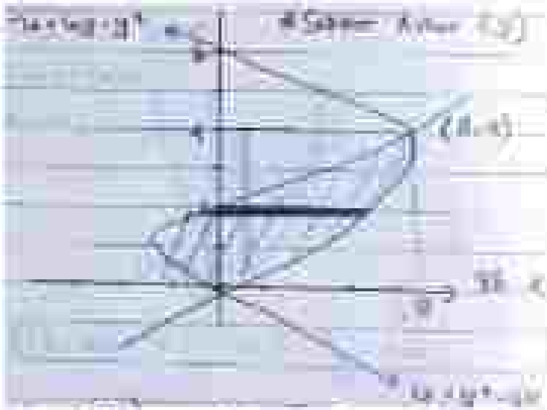
$2y^2 - 8y = 0$

$y\,(2y - 8) = 0$

$y = 0 \quad y = 4$

$x = 0 \quad x = 8$

$(0,0) \quad (8,4)$



$L = \int_0^4 \{(6y - y^2) - (y^2 - 2y)\}\, dy$

$= \int_0^4 (8y - 2y^2)\, dy$

$= (4y^2 - \frac{2}{3}y^3)\Big|_0^4$

$= (4(4)^2 - \frac{2}{3}(4)^3) - 0$

$= \frac{-128}{3} + 64$

$= 21\frac{1}{3}$

3. $x^2 + y = 0;\ y - x - 6 = 0; y = 0$

Jawab:

$x^2 + y = 0$

$a < 0$

$D = 0$

$x = \sqrt{-y}$

$y = x - 6$

Y	0	-6
X	6	0

$x = y + 6$

Mencari titik potong:

$-x^2 = x - 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x - 2)(x + 3) = 0$

$x = 2 \vee x = -3$

$y = -4 \vee y = -9$

$(2, -4)$ $(-3, -9) \rightarrow$ **TM karena berada pada kuadran 4**

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-4}^{0} \left(y + 6 - \sqrt{-y}\right) dy \\
&= \left(\frac{1}{2}y^2 + 6y\right)_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0} \sqrt{-y}\ dy \\
&= -(8 - 24) - \frac{16}{3} \\
&= 16 - \frac{16}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

Misal:

$m = -y$

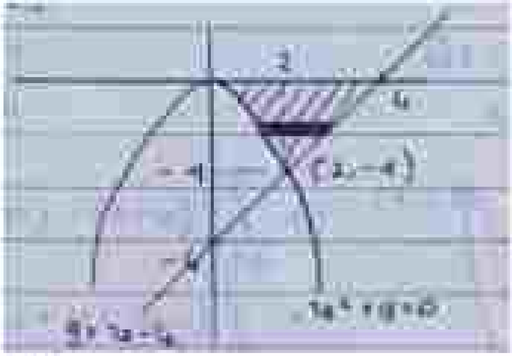
$dm = -1\ dy$

$-dm = 1\ dy$

Perubahan batas:

$y = -4 \quad \Rightarrow m = 4$

$y = 0 \quad \Rightarrow m = 0$



$\int_4^0 \sqrt{m}$ −
dm =
$-\int_4^0 \sqrt{m}\, dm$

=
$-\int_4^0 \sqrt{m}\,\frac{1}{2}$ −
dm

$$= \left(\frac{2}{3}\, m\sqrt{m}\right)_4^0$$
$$= 0 - \left(-\frac{2}{3}\cdot 4.2\right)$$
$$= \frac{16}{3}$$

Catatan : *"Perubahan batas tidak berpengaruh pada batas awal"*

4. $y = x^2 - 2$ dan $y = x + 4$

Jawab:

- $y = x^2 - 2$

$a > 0$
$D = 8 > 0$
$y = 0 \rightarrow\ x^2 - 2 = 0$
$x = \pm\sqrt{2}$
$x = 0 \rightarrow y = -2$

- $y = x + 4$

Y 0 4

X   -4   0

Mencari titik potong:

$x^2 - 2 = x + 4$

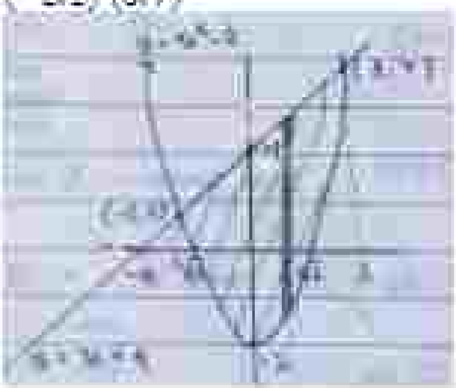
$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \lor x = 3$

$y = 2 \lor y = 7$

$(-2,2)\ (3,7)$



1. $= \int_{-2}^{3} ((x+4) - (x^2 - 2))\, dx$

$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx$

$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right)_{-2}^{3}$

$= \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right)$

$= \frac{27}{2} - \frac{-22}{3} = 9 + \frac{7}{3} => \frac{11}{3}$

5. $x - y - 1 = 0$ dan $x + y^2 - 3 = 0$

Jawab:

$x = y + 1$

X	0	1
Y	-1	0

$x = -y^2 + 3$

$a < 0$

$D = 12 > 0$

$y = 0 \rightarrow x = 3$

$x = 0 \rightarrow y^2 + 3 = 0$

$\qquad\qquad y = \pm\sqrt{3}$

Mencari titik potong:

$-y^2 + 3 = y + 1$

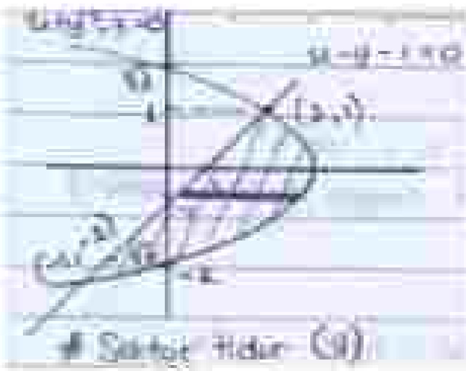
$y^2 + y - 2 = 0$

$(y - 1)(y + 2) = 0$

$y = 1 \vee y = -2$

$x = 2 \vee x = -1$

$(2, 1) \qquad (-1, -2)$



$L \qquad = \int_{-2}^{1} \left((-y^2 + 3) - (y + 1)\right) dy$

$$= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\, y^3 - \frac{1}{2} y^2 + 2y\right)_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{-8}{3} - 2 - 4\right)$$

$$= \frac{-5}{6} - \frac{-14}{3}$$

$$= \frac{23}{6} \Rightarrow 4\frac{1}{2}$$

C. VOLUME BENDA PUTAR

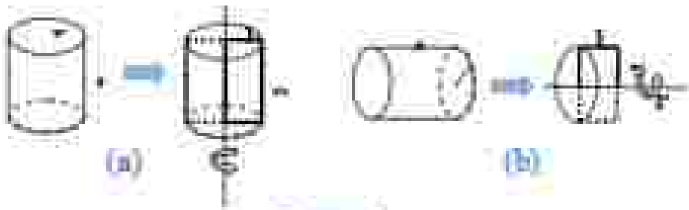
Dalam menghitung luas, salah satunya kita dapat menggunakan integral tentu. Selain itu, integral dapat juga digunakan untuk menghitung volume benda-benda tertentu yang akan nantinya kita bahas dibawah ini.

Gambar 1

Perhatikan Gambar 1 Yang dimaksud volume itu apa? Berdasarkan pada Gambar 1, diperoleh bahwa volume adalah perkalian dari daerah alas (luas alas atau A) dengan tinggi h , atau bisa kita tuliskan sebagai

$$\boxed{V = A\, .\, t}$$

Sebelum membahas tentang volume benda putar, terlebih dahulu kita harus mengetahui apa itu benda putar? apa itu sumbu putar? Yang dimaksud **benda putar** yaitu sebuah daerah rata yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis tetap, diputar mengelilingi garis tersebut. Sedangkan garis yang tetap tersebut dinamakan **sumbu putar**.



Gambar 2

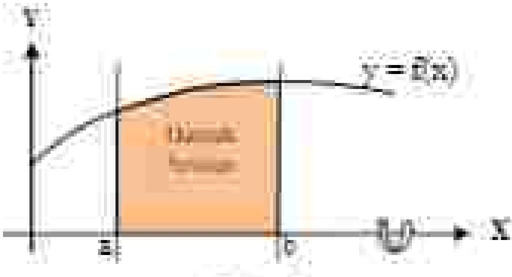
Pada Gambar 2.a dapat kita ketahui bahwa volume tabung (berdiri) yaitu $V = \pi r^2 t$, akan tetapi setelah tabung diputar secara vertikal maka volume tabung menjadi $V = \pi l^2 p$.

Sedangkan pada Gambar 2.b dapat kita ketahui bahwa volume tabung (tidur) yaitu $V = \pi r^2 t$, akan tetapi setelah tabung diputar secara horizontal maka volume tabung menjadi $V = \pi p^2 l$.

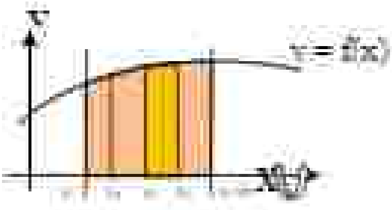
Terdapat 2 metode dalam mencari volume benda putar, yaitu metode standar dan metode cincin.

a. METODE STANDAR

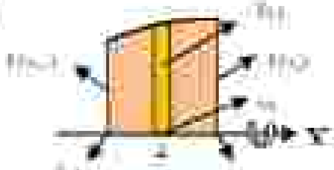
Jika terdapat $x = a$ dan $x = b$ yang dilalui oleh sebuah kurva $y = F(x)$. Maka akan membentuk sebuah daerah arsiran (Perhatikan Gambar 3). Apabila daerah arsiran tersebut ($a \leq x \leq b$) dibagi menjadi n bagian yang sama masing-masing sebesar Δx dengan ketentuan $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ melalui $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ dibuat garis sejajar sumbu y sehingga memotong kurva $y = F(x)$ (Perhatikan Gambar 4).



Gambar 3



Gambar 4



Gambar 5

Kemudian ambil sebarang sektor (sektor ke-i) (Perhatikan Gambar 5), sehingga diperoleh bahwa:

$V_i = \pi\left(F(x_{i-1})\right)^2 \Delta x_i$

$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i$

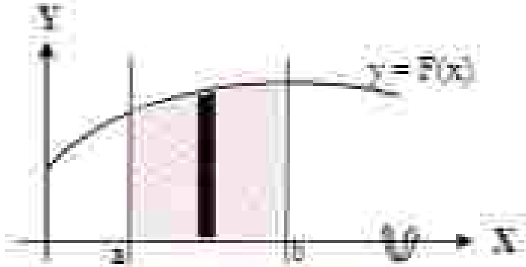
$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(F(x_{ti}) \right)^2 \Delta x_i$

Jadi, Rumus Volume benda putar yaitu

$V = \int_a^b \pi \left(F(x) \right)^2 dx$ atau $V = \pi \int_a^b \left(F(x) \right)^2 dx$

Dimana F(x) sebagai jari-jari dan dx sebagai tinggi

- **Volume benda putar sektor berdiri (sejajar sumbu y)**



Gambar 6. Sektor Berdiri

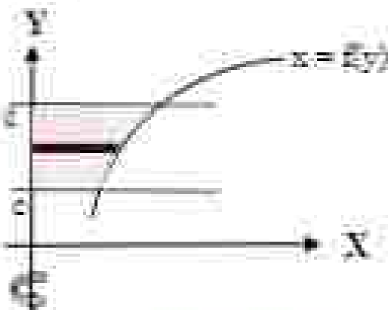
Jadi, apabila sektor berdiri maka menggunakan rumus berikut:

$$V = \pi \int_c^d (F(x) - 0)^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_c^d \left(F(x)\right)^2 dx$$

Ingat!!!
Kalau sektor berdiri maka jari-jarinya yaitu y atas – y bawah

❖ **Volume benda putar sektor tidur (sejajar sumbu x)**



Gambar 7. Sektor Tidur

Jadi, apabila sektor tidur maka menggunakan rumus berikut:

$$V = \pi \int_c^d (F(y) - 0)^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_c^d \left(F(y)\right)^2 dy$$

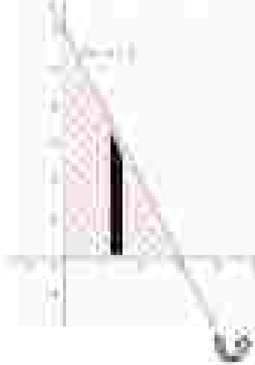
Ingat!!!
Kalau sektor tidur maka jari-jarinya yaitu x kanan – x kiri

Jika mencari volume benda putar menggunakan metode standar maka kuncinya yaitu sektor harus tegak lurus dengan sumbu putar.

Contoh

1. A adalah bidang datar yang dibatasi oleh $6x + 3y = 18$; sumbu x dan sumbu y.
   a. Jika bidang datar A diputar mengelilingi sumbu x, tentukan volume benda putar yang terjadi!
   b. Jika bidang datar A diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar yang terjadi!

Pembahasan (a):



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.

  Adapun cara menggambar persamaan 6x + 3y = 18 tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	3
y	6	0
(x,y)	(0, 6)	(3,0)

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya berdiri.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka jari-jarinya yaitu Y atas – Y bawah.

  Y atas adalah Y dari grafik persamaan 6x + 3y = 18, sehingga diperoleh :

  $6x + 3y = 18$

$$3y = 18 - 6x$$
$$Y = 6 - 2x$$

Sedangkan Y bawah = 0

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

  $$V = \int_{0}^{3} \pi\left((6-2x)-0\right)^2 dx$$

  $$V = \pi \int_0^3 (6-2x)^2 \, dx$$

  $$V = \pi \int_0^3 (36 - 24x + 4x^2) \, dx$$

  $$V = \pi\left(36x - 12x^2 + \tfrac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^3$$

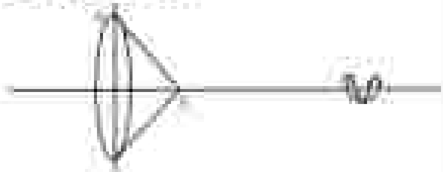
  $$V = \pi(108 - 108 + 36)$$

  $$V = 36\pi$$

  Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 36π.

Cara Cepat:

Coba lihat gambar berikut!



Apabila gambar tersebut diputar mengelilingi sumbu x, maka akan membentuk bangun ruang limas, sehingga diperoleh sebagai berikut:

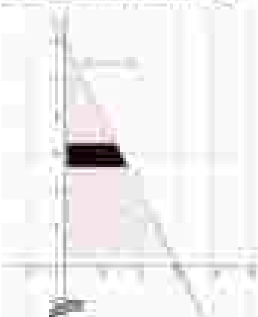
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$

$V = \frac{1}{3}\pi 6^2 3$

$V = 36\pi$

Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 36π.

Pembahasan (b):



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-hatasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius (lihat jawaban a langkah 1)
- Langkah 2: Menentukan sektor
  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya tidur.
  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah tidur, maka jari-jarinya yaitu X kanan – X kiri.
  X kanan adalah X dari grafik persamaan 6x + 3y = 18, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 18 \\ 6x &= 18 - 3y \\ x &= 3 - \tfrac{1}{2}y \end{aligned}$$

  Sedangkan X kiri = 0
- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = \int_0^6 \pi\left(\left(3 - \frac{1}{2}y\right) - 0\right)^2 dy$$

$$V = \pi\int_0^6 \left(3 - \tfrac{1}{2}y\right)^2 dy$$

$$V = \pi\int_0^6 \left(9 - 3y + \tfrac{1}{4}y^2\right) dy$$

$$V = \pi\left(9y - \tfrac{3}{2}y^2 + \tfrac{1}{12}y^3\right)\Big|_0^6$$

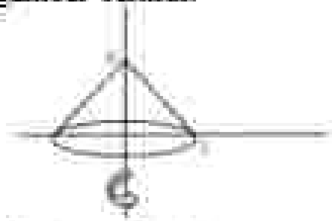
$$V = \pi(54 - 54 + 18)$$

$$V = 18\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 18π.

Cara Cepat:

Coba lihat gambar berikut!



Apabila gambar tersebut diputar mengelilingi sumbu x, maka akan membentuk bangun ruang limas, sehingga diperoleh sebagai berikut:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$

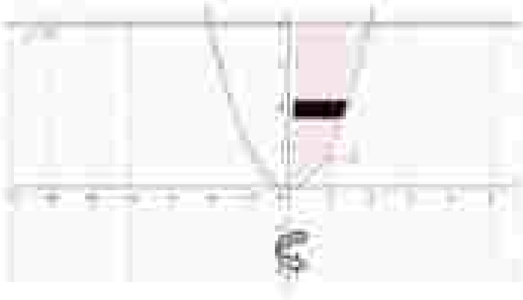
$V = \frac{1}{3}\pi 3^2 6$

$V = 18\pi$

Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 18π.

2. B adalah bidang datar yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = 4$ dan terletak di kuadran 1. Jika bidang datar B diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar yang terjadi!

Jawab:



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.

  Adapun cara menggambar persamaan $y = x^2$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	$\pm\sqrt{4} = \pm 2$
y	0	4
(x,y)	(0, 0)	($\pm$2,4)

  Karena nilai $D = b^2 - 4ac = 0$, dan nilai a > 0. Maka kurva terbuka keatas dan berhimpit dengan sumbu x.

  Titik perpotongan antara $y = x^2$ dan y = 4 adalah sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \text{ , substitusikan y = 4 ke persamaan} \\
4 &= x^2 \\
\sqrt{4} &= x \\
2 &= x
\end{aligned}
$$

Karena x = 2, maka $y = x^2 = 4$

Sehingga titik perpotongannya yaitu (2,4).

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya tidur.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah tidur, maka jari-jarinya yaitu X kanan – X kiri.

  X kanan adalah X dari grafik persamaan $y = x^2$; sehingga diperolah : $x = \sqrt{y}$

  Sedangkan X kiri = 0

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

  $$V = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{y} - 0\right)^2 dx$$

  $$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dx$$

  $$V = \pi \int_0^4 y \, dx$$

  $$V = \pi\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^4$$

  $$V = 8\pi$$

  Jadi, volume benda putar pada bidang B adalah 8π.

Volume Benda Putar Berongga

Perhatikan gambar di bawah ini!

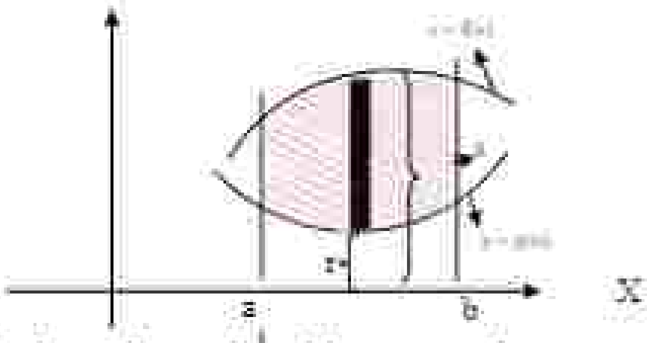
Dari gambar disamping, diperoleh :

$V = \pi R^2 t - \pi r^2 t = \pi(R^2 - r^2)t$

Dengan:

R^2 = jari-jari besar

r^2 = jari-jari kecil



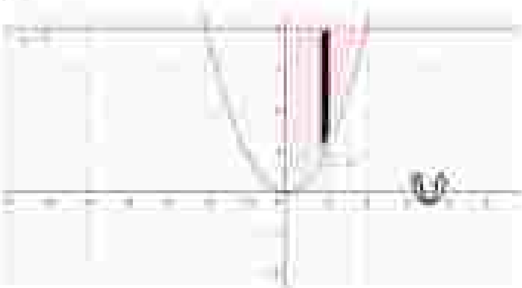
Dari Gambar diatas, diperoleh rumus volume benda putar sebagai berikut:

$$V = \int_a^b \pi \{(F(x) - 0)^2 - (g(x) - 0)^2\} dx$$
$$= \pi \int_a^b \{F(x)^2 - g(x)^2\} dx$$

Contoh

1. B adalah bidang datar yang dibatasi oleh $y = x^2$; $y = 4$ dan terletak di kuadran I. Jika bidang datar B diputar mengelilingi sumbu x, tentukan volume benda putar yang terjadi!

Jawab:



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.

  Adapun cara menggambar persamaan $y = x^2$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

X	0	$\pm\sqrt{4} = \pm 2$
Y	0	4
(x,y)	(0, 0)	($\pm$2,4)

  Karena nilai D = $b^2 - 4ac = 0$, dan nilai a > 0. Maka kurva terbuka keatas dan berhimpit dengan sumbu x. Kemudian mencari Titik perpotongan antara $y = x^2$ dan y = 4 adalah sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \text{ , substitusikan } y = 4 \text{ ke persamaan} \\
4 &= x^2 \\
\sqrt{4} &= x \\
2 &= x
\end{aligned}
$$

  Karena x = 2 maka $y = x^2 = 4$.

Sehingga titik perpotongannya yaitu (2,4).

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya berdiri.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka jari-jarinya:

  R = Y atas − Y bawah = 4 - 0

  r = Y atas − Y bawah = x^2 - 0

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = \int_0^2 \pi\{(4-0)^2 - (x^2-0)^2\}\,dx$$

$$V = \pi\int_0^2 (16 - x^4)\,dx$$

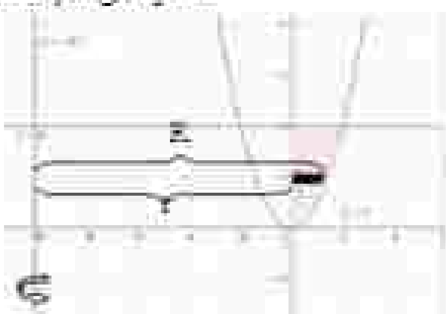
$$V = \pi\left(16x - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2$$

$$V = \pi\left(32 - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \frac{128}{5}\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang B adalah $\frac{128}{5}\pi$.

2. Jika bidang datar B (pada soal no 1) diputar mengelilingi garis x = -10, tentukan volume benda putar yang terjadi!



Jawab:

Pengerjaan sama dengan no 1 diatas, akan tetapi sektor yang terbentuk adalah sektor tidur. Maka jari-jarinya:

$$R = \text{X kanan} - \text{X kiri} = \sqrt{y} - (-10) = \sqrt{y} + 10$$
$$r = \text{X kanan} - \text{X kiri} = 0 - (-10) = 0 + 10$$

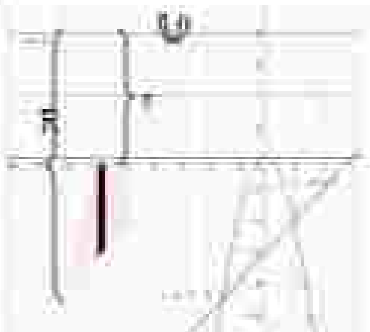
Sehingga diperoleh,

$$V = \int_0^4 \pi \left[\left(\sqrt{y} + 10\right)^2 - (0 + 10)^2 \right] dy$$
$$V = \pi \int_0^4 \left(y + 20\sqrt{y} + 100 - 100\right) dx$$
$$V = \pi \int_0^4 \left(y + 20\sqrt{y}\right) dx$$
$$V = \pi \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{40}{3} y\sqrt{y}\right)\Big|_0^4$$
$$V = \pi \left(8 + \frac{40}{3} . 4.2\right)$$
$$V = \pi \left(8 + \frac{320}{3}\right)$$
$$V = \frac{344}{3} \pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang B adalah $\frac{844}{3}\pi$.

3. C adalah bidang datar yang dibatasi oleh $y + x^2 = 0$; $x - y - 6 = 0$. Apabila bidang datar C diputar mengelilingi garis $y = 8$, tentukan volume benda putar yang terjadi!

Jawab:



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.

➢ Menggambar persamaan $y + x^2 = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

X	0	2	-2
Y	0	-4	-4
(x,y)	(0, 0)	$(2, -4)$	(-2,-4)

Karena nilai D $= b^2 - 4ac = 0$, dan nilai a < 0. Maka kurva terbuka kebawah dan berhimpit dengan sumbu x.

➤ Menggambar persamaan $x - y - 6 = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	6
y	-6	0
(x,y)	(0, -6)	(6,0)

Titik perpotongan antara $y = -x^2$ dan $x - y - 6 = 0$ adalah sebagai berikut.

$$x - y - 6 = 0 \text{ , substitusikan } y = -x^2$$

$$x + x^2 - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

Sehingga diperoleh x = -3; x = 2

Untuk x = -3, maka $y = -x^2 = -9$

Untuk x = 2, maka $y = -x^2 = -4$

Sehingga titik perpotongannya yaitu (-3,-9) dan (2,-4).

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya berdiri.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka jari-jarinya:

  $R = \text{Y atas} - \text{Y bawah} = 0 - (x - 6)$

  $r = \text{Y atas} - \text{Y bawah} = 0 - (-x^2)$

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = \int_{-4}^{2} \pi\left(\left(6 - (x - 8)\right)^2 - \left(8 + x^2\right)^2\right)dx$$
$$V = \int_{-4}^{2} \pi\left((14 - x)^2 - \left(8 + x^2\right)^2\right)dx$$
$$V = \int_{-4}^{2} \pi\left((196 - 28x + x^2) - (64 + 16x^2 + x^4)\right)dx$$
$$V = \pi\int_{-4}^{2} (132 - 28x - 15x^2 - x^4)\,dx$$
$$V = \pi\left(132x - 14x^2 - 5x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-4}^{2}$$
$$V = \pi\left(\left(264 - 56 - 40 - \frac{32}{5}\right) - \left(-528 - 224 + 320 - \frac{1024}{5}\right)\right)$$
$$V = \pi\left(\left(\frac{840 - 32}{5}\right) - \left(\frac{-2160 - 1024}{5}\right)\right)$$
$$V = \frac{3000}{5}\pi$$
$$V = 600\,\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang C adalah 600 π.

b. METODE CINCIN

Apabila pada benda putar sumbu putarnya dipotong-potong tegak lurus maka akan terbentuk sebuah cakram yang tengahnya berlubang. Daerah demikian yang disebut cincin. Cirinya yaitu mempunyai jari-jari, tinggi dan ketebalan. Perhatikan gambar dibawah ini!

Gambar 8

Dari Gambar 8 diperoleh

$$
\begin{aligned}
V_i &= \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(\bar{x}_i) \\
&= \pi(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) f(\bar{x}_i) \\
&= 2\pi \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) f(\bar{x}_i) \\
&= 2\pi\, \bar{x}_i\, \Delta x_i\, f(\bar{x}_i) \\
&= 2\pi\, \bar{x}_i\, f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i \\
V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, \bar{x}_i\, f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i
\end{aligned}
$$

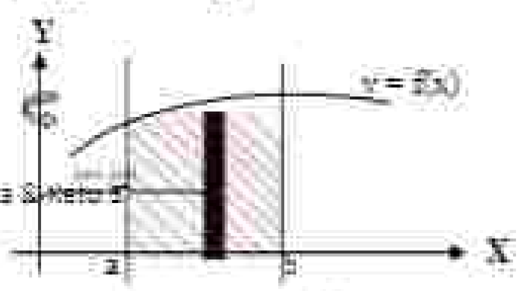
Jadi, Rumus Volume benda putar yaitu

$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$ atau $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Dimana: x sebagai jari-jari

F(x) sebagai tinggi **dx** sebagai ketebalan

- **Volume benda putar sektor berdiri (sejajar sumbu y)**



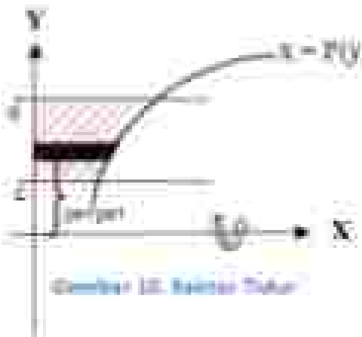
Gambar 8. Sektor Berdiri

Jadi, apabila sektor berdiri maka menggunakan rumus berikut :

$$V = 2\pi \int_a^b (x-0)(F(x)-0)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_a^b x\,F(x)\,dx$$

Volume benda putar sektor tidur (sejajar sumbu x)



Gambar 10. Sektor Tidur

Jadi, apabila sektor tidur maka menggunakan rumus berikut :

$$V = 2\pi \int_c^d (y-0)(F(y)-0)\,dy$$

$$V = 2\pi \int_c^d y\,F(y)\,dy$$

Jika mencari volume benda putar menggunakan metode cincin maka kuncinya yaitu sektor harus sejajar dengan sumbu putar

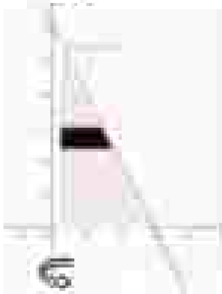
Contoh

1. A adalah bidang datar yang dibatasi oleh $2x + y = 6$, sumbu x dan sumbu y. Jika bidang datar A diputar mengelilingi sumbu y, carilah volume benda putar yang terjadi dengan menggunakan metode:

a. Standar
b. Cincin

Jawab:

a. Menggunakan metode Standar



- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.

  Adapun cara menggambar persamaan 2x – y = 6 tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	3
y	6	0
(x,y)	(0, 6)	(3,0)

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Dikarenakan menggunakan metode standar dan cara menentukan sektornya harus tegak lurus dengan sumbu putar, maka sektornya tidur.

Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah tidur, maka jari-jarinya yaitu X kanan – X kiri.

X kanan adalah X dari grafik persamaan $2x + y = 6$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2x &= 6 - y \\ x &= 3 - \tfrac{1}{2}y \end{aligned}$$

Sedangkan X kiri = 0

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu

$$V = \int_0^6 \pi\left(\left(3 - \tfrac{1}{2}y\right) - 0\right)^2 dy$$
$$V = \pi\int_0^6 \left(3 - \tfrac{1}{2}y\right)^2 dy$$
$$V = \pi\int_0^6 \left(9 - 3y + \tfrac{1}{4}y^2\right) dy$$
$$V = \pi\left(9y - \tfrac{3}{2}y^2 + \tfrac{1}{12}y^3\right)\Big|_0^6$$
$$V = \pi(54 - 54 + 18)$$
$$V = 18\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 18π.

b. Menggunakan metode Cincin

Andika S

Dikarenakan menggunakan metode cincin dan cara menentukan sektornya harus sejajar dengan sumbu putar, maka sektornya berdiri.

Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka:

- Jari-jarinya yaitu x kanan – x kiri = x – 0
- Tingginya yaitu y atas – y bawah.

  y atas adalah y dari grafik persamaan 2x – y = 6, sehingga diperoleh:

  $$2x - y = 6$$
  $$y = 6 - 2x$$

  Sedangkan Y bawah = 0

Selanjutnya Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = 2\pi \int_{0}^{3} (x - 0)\big((6 - 2x) - 0\big)dx$$

$$V = 2\pi \int_{0}^{3} (6x - 2x^2)dx$$

$$V = 2\pi\left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$V = 2\pi(27 - 18)$$

$V = 18\pi$

Jadi, volume benda putar pada bidang A adalah 18π.

2. B adalah bidang datar yang dibatasi oleh $x^2 - y = 0$ dan $x - y^2 = 0$. Apabila bidang datar B diputar mengelilingi sumbu x, Tentukan volume benda putar yang terjadi dengan menggunakan metode:
   a. Standar
   b. Cincin

Jawab:

a. Menggunakan Metode Standar

- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.
  - Menggambar persamaan $x^2 - y = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
  -

x	0	$\pm\sqrt{4} = \pm 2$
y	0	4
(x,y)	(0, 0)	$(\pm 2, 4)$

Karena nilai D = $b^2 - 4ac = 0$, dan nilai a > 0. Maka kurva terbuka keatas dan berhimpit dengan sumbu x.

  - Menggambar persamaan $x - y^2 = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	4
y	0	$\pm\sqrt{4} = \pm 2$
(x,y)	(0, 0)	$(4, \pm 2)$

Karena nilai D = $b^2 - 4ac = 0$, dan nilai a > 0. Maka kurva terbuka kekanan dan berhimpit dengan sumbu x.

Titik perpotongan antara $x^2 = y$ atau dan $x - y^2 = 0$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x - y^2 &= 0 \text{ , substitusikan } x^2 = y \text{ ke persamaan} \\
x - (x^2)^2 &= 0 \\
x - x^4 &= 0 \\
x(1 - x^3) &= 0
\end{aligned}
$$

Maka diperoleh x = 0; x= 1

Untuk x = 0, maka $y = 0$

Untuk x = 1, maka y = 1

Sehingga titik perpotongannya yaitu (0,0) dan (1,1).

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektornya berdiri.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka jari-jarinya:

  R = Y atas − Y bawah

  Y atas yaitu Y dari persamaan $x - y^2 = 0$ sehingga $y = \sqrt{x}$. Sedangkan Y bawah yaitu 0.

  Maka jari-jari besar (R) = $\sqrt{x} - 0$

  r = Y atas − Y bawah

  Y atas yaitu Y dari persamaan $x^2 - y = 0$ sehingga $y = x^2$. Sedangkan Y bawah yaitu 0.

  Maka jari-jari kecil (r) = $x^2 - 0$

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt{x} - 0\right)^2 - \left(x^2 - 0\right)^2\right] dx$$

$$V = \pi\int_0^1 (x - x^4)\, dx$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$V = \frac{3}{10}\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang B adalah $\frac{3}{10}\pi$

b. Menggunakan Metode Cincin

Dikarenakan menggunakan metode cincin dan cara menentukan sektornya harus sejajar dengan sumbu putar, maka sektornya tidur.

Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah tidur, maka

- Jari-jarinya yaitu y atas – y bawah

  (r = y – 0)

- Tingginya yaitu x kanan – x kiri

  x kanan adalah x dari grafik persamaan $x^2 - y = 0$, sehingga diperoleh:

$$x^2 - y = 0$$
$$x = \sqrt{y}$$

Sedangkan X kiri adalah X dari grafik persamaan $x - y^2 = 0$, sehingga diperoleh:

$$x - y^2 = 0$$
$$x = y^2$$

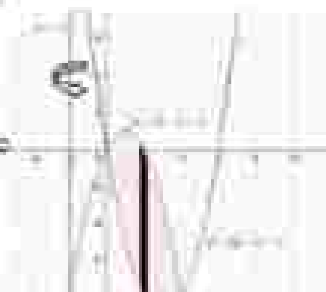
Selanjutnya Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = 2\pi \int_0^1 (y - 0)\left(\sqrt{\circledcirc} - y^2\right) dy$$
$$V = 2\pi \int_0^1 (y\sqrt{y} - y^3) dy$$
$$V = 2\pi \left(\frac{2}{5} y^2 \sqrt{y} - \frac{1}{4} y^4\right)\Big|_0^1$$
$$V = 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)$$
$$V = \frac{3}{10}\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang B adalah $\frac{3}{10}\pi$

3. C adalah bidang datar yang dibatasi oleh $2x - x^2 - y = 0$ dan $x^2 - 6x - y = 0$. Apabila bidang datar C diputar mengelilingi sumbu garis x = -2. Carilah volume benda putar yang terjadi!

Jawab:



Andika & Keto

- Langkah 1: Menggambar persamaan beserta batasan-batasan yang telah diketahui ke dalam diagram kartesius.
  - ➢ Menggambar persamaan $2x - x^2 - y = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	0;2
y	0	0
(x,y)	(0,0)	(0;2,0)

Karena nilai D = $b^2 - 4ac = 4$, dan nilai a < 0. Maka kurva terbuka kebawah dan memotong sumbu x.

  - ➢ Menggambar persamaan $x^2 - 6x - y = 0$ tersebut yaitu dengan menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

x	0	0;6
y	0	0
(x,y)	(0; 0)	(0; 6,0)

Karena nilai D = $b^2 - 4ac = 36$, dan nilai a > 0, Maka kurva terbuka keatas dan memotong sumbu x.

Titik perpotongan antara $y = 2x - x^2$ dan $y = x^2 - 6x$ adalah sebagai berikut:

$$2x = x^2 - 6x$$
$$-2x^2 = 0$$
$$2x(-x = 0$$

Maka diperoleh x = 0; x= 4

Untuk x = 0, maka y = 0

Untuk x = 4, maka y = -8

Sehingga titik perpotongannya yaitu (0,0) dan (4,-8).

- Langkah 2: Menentukan sektor

  Berdasarkan gambar tersebut, maka sektor yang dapat terbentuk adalah berdiri. Sehingga pada kasus ini hanya dapat dikerjakan menggunakan **metode cincin** karena sektor sejajar dengan sumbu putar.

  Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka:

  - Jari-jarinya yaitu x kanan – x kiri = x – 2
  - Tingginya yaitu y atas – y bawah.

    y atas adalah y dari grafik persamaan $y = 2x - x^2$

    y bawah adalah y dari grafik persamaan $y = x^2 - 6x$

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$$V = 2\pi \int_0^4 (x+2)[(2x - x^2) - (x^2 - 6x)]\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 (-2x^3 + 4x^2 + 16x)\,dx$$

$$V = 2\pi x^2 \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}x + 8\right)\Big|_0^4$$

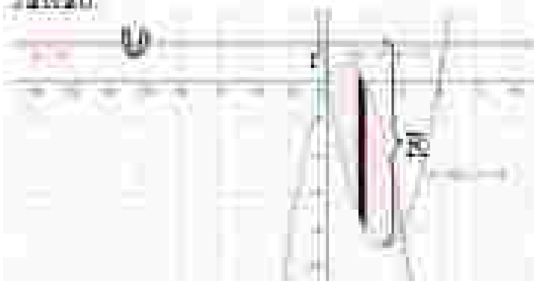
$$V = 2\pi\, 16 \left(-8 + \tfrac{16}{3} + 8\right)\Big|_0^4$$

$$V = \frac{512}{3}\pi$$

Jadi, volume benda putar pada bidang C adalah $\frac{512}{3}\pi$

4. Diketahui bidang datar C seperti pada soal no 3. Apabila bidang datar C diputar mengelilingi sumbu garis y = 2. Carilah volume benda putar yang terjadi!

Jawab:



Berdasarkan gambar tersebut, maka sektor yang dapat terbentuk adalah berdiri. Sehingga pada kasus ini hanya dapat dikerjakan menggunakan **metode standar** karena sektor tegak lurus dengan sumbu putar. Dikarenakan sektor yang terbentuk adalah berdiri, maka jari-jarinya:

r = y atas − y bawah

y atas yaitu $y = 2$

y bawah yaitu y dari persamaan $y = x^2 - 6x$

Maka jari-jari besar (R) $= 2 - (x^2 - 6x)$

r = Y atas − Y bawah

Y atas yaitu $Y = 2$

Y bawah yaitu Y dari persamaan $y = 2x - x^2$

Maka jari-jari kecil (r) $= 2 - (2x - x^2)$

- Langkah 3: Mencari volume daerah dengan menggunakan integral tertentu.

$V = \pi \int_0^4 [(2 - x^2 + 6x)^2 - (2 - 2x + x^2)^2]\,dx$

$V = \pi \int_0^4 [(2 - x^2 + 6x) + (2 - 2x + x^2)][(2 - x^2 + 6x) - (2 - 2x + x^2)]\,dx$

$V = \pi \int_0^4 (4 + 4x)(-2x^2 + 8x)\,dx$

$V = \pi \int_0^4 (-8x^3 + 24x^2 + 32x)\,dx$

$V = \pi(-2x^4 + 8x^3 + 16x^2)|_0^4$

$V = \pi(-512 + 512 + 256)$

$V = 256\,\pi$

Jadi, volume benda putar pada bidang C adalah $256\,\pi$.

BAB 3

INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

A. DEFINISI INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Menurut definisi, fungsi rasional adalah hasil dari dua fungsi polinomial. Sebagai mana bentuk umum adalah $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$, dimana $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi polinomial ($ax^2 + bx + c = 0$) atau suku banyak.

B. PENJELASAN MATERI

KASUS I

"Jika pangkat $f(x) <$ pangkat $g(x)$. Cukup di lihat penyebutnya."

Jika $g(x)$ dapat di faktorkan menjadi faktor-faktor linear y berbeda. $D > 0$ ➔ $D = b^2 - 4a\,c$.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \int \frac{f(x)}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + c)}\, dx$$

Langkah-langkah:

1. Misal

$$\frac{f(x)}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + c)} = \frac{A}{(a_1 x + b_1)} + \frac{B}{(a_2 x + c)}$$

Tentukan $A \cap B$ dengan SPLDV

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \left(\int \frac{f'(x)}{g(x)} dx = \ln f(x) + c \right)$

KASUS II

"Jika $g(x)$ dapat di faktorkan menjadi faktor-faktor linear yang sama."

$$\boxed{D = 0 \quad D = b^2 - 4ac}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \int \frac{f(x)}{(ax+b)(ax+b)}$$

Langkah-langkah:

1. Misal $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2}$
2. $\frac{1}{x} dx = \ln x + c$ atau $\int \frac{f'(x)}{g(x)} dx = \ln f(x) + c$

   $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

KASUS III

"Jika $g(x)$ tidak dapat di faktorkan menjadi faktor-faktor linear."

$$\boxed{D < 0 \quad D = b^2 - 4ac}$$

1. Jika pangkat $g(x)$ > pangkat $f(x)$:

Langkah – langkah

1. Turunkan $g(x)$ → hasilnya = pembilang:
2. Dipecah 2 suku

3. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c$ dan

$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = arc\ tg\ x + c$

Melengkapkan kuadrat sempurna $a = 1$

1. $x^2 + 4x + 10 = (x + 2)^2 + 6$

2. $2x^2 - 8x + 100 = 2(x^2 - 4x + 50)$

$= 2((x - 2)^2 + 46)$

2. Jika pangkat $f(x) \geq$ pangkat $g(x)$

Langkah – langkah

1. $\frac{f(x)}{g(x)}$ di bentuk menjadi $H(x) + \frac{s(x)}{g(x)}$ dengan menggunakan porogapit

2. Sehingga $\frac{s(x)}{g(x)}$ kembali ke $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$

BAB 4

REDUKSI FUNGSI TRIGONOMETRI

Istilah reduksi biasanya sering dipakai dalam bidang kimia, berdasarkan pengertiannya reduksi memiliki arti penambahan jumlah elektron dari sebuah atom, molekul ataupun ion. Dimana atom, molekul atau ion tersebut sangat erat kaitannya dengan bidang kimia. Akan tetapi, matematika juga memakai istilah reduksi, yaitu tepatnya untuk menamakan sebuah rumus. Rumus reduksi dalam integral banyak sekali penggunaannya, karena di dalam menyelesaikan sebuah permasalahan atau persoalan matematika tidaklah cukup dengan menggunakan satu rumus.

Rumus Reduksi Fungsi Trigonometri

Konsep :

1) $3^5 = 3^4 \cdot 3$
2) $\sin^3 x = 3\sin^2 x \cos x$

$$\int \cos^n u\,du = \int \cos^{n-1} x \cos x\,du$$

$u = \cos^{n-1} x$

$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x)$

$dv = \cos u\,du \rightarrow v = \sin x$

$$\int \cos^n u\,du = \sin u \cos^{n-1} u + \int \sin u\,(n-1)\cos^{n-2} \sin u\,du$$

$$= -(n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= (n-1)\int \cos^{n-2}(1-\cos^2 x)\, dx$$

$$= (n-1)[\int \cos^{n-2} dx - \int \cos^n x\, dx$$

$$n\int \cos^n x\, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n} dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2} dx \text{ .... (rumus 1)}$$

- Contoh Soal
  1. Soal 1

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos^0 x\, dx$$

$$= \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x + C$$

  2. Soal 2

$$\int \cos^5 x\, dx = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\, dx$$

$$= \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx\right]$$

$$= \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5}\sin x \cos^2 x + \frac{8}{15}\sin x + C$$

  3. Soal 3

$$\int \sin^n x\, dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx$$

$u = \sin^{n-1} x$

$$Maka\ du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x$$
$$dv = \sin x\, dx$$
$$maka\ u = -\cos x$$

$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \cos x (n-1) \cos x \sin^{n-2} x\, dx$$
$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x\, dx$$
$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$
$$\int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx - \sin^n x\, dx$$
$$n \int \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx$$
$$\int \sin^n x\, dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx \text{ ……… Rumus 2}$$
$$\int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x dx$$
$$= \int y^{n-2} dy - \int \tan^{n-2} x\, dx$$
$$= \frac{1}{n-1} y^{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} y^{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx \text{ ……… Rumus 3}$$
$$\int ctg^n x\, dx = \int ctg^{n-2} x\, ctg^2 x\, dx$$
$$= \int ctg^{n-2} x (\csc^2 x - 1) dx$$
$$= \int ctg^{n-2} x \csc^2 x\, dx - \int ctg^{n-2} x\, dx$$
$$= \int y^{n-2} dy - \int ctg^{n-2} x\, dx$$
$$= \frac{1}{n-1} y^{n-1} - \int ctg^{n-2} x\, dx$$

$$\int ctg^{n} x\, dx = \frac{1}{n-1} ctg^{n-1} - \int ctg^{n-2} x\, dx \text{ ..... Rumus 4}$$

$$\int \tan^3 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \tan^3 y\, dy$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\tan^2 y - \int \tan y\, dy\right) = \frac{1}{8}\tan^2 y - \frac{1}{4}\ln \sec y + C$$

$$= \frac{1}{8}\tan^2 4x - \frac{1}{4}\ln \sec 4x + C$$

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} dx$$

$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x} dx$$

$$= \ln(\tan x + \sec x) + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \csc x \frac{ctg\, x + \csc x}{ctg\, x + \csc x} dx$$

$$= \int \frac{\csc x\, ctg\, x + \csc^2 x}{ctg\, x + \csc x} dx$$

$$= \ln(ctg\, x + \csc x) + C$$

$$\int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan x\,(n-2)\sec^{n-2} x \tan x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \tan^2 x \sec^{n-2} x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int (\sec^2 x - 1)\sec^{n-2} x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x\, dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$(n-1)\int \sec^n x\, dx = \sec^{n-2} x \tan x + (n-1)\int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{(n-1)} + \frac{(n-2)}{(n-1)}\int \sec^{n-2} x\, dx \text{ ..... Rumus 5}$$

$$\int \csc^n x\, dx = \frac{-\csc^{n-2} x\, ctg\, x}{(n-1)} + \frac{(n-2)}{(n-1)}\int \csc^{n-2} x\, dx \text{ ..... Rumus 6}$$

- Contoh Soal

$$\int (x-1)\csc^4(x^2-2x+7)\,dx$$

misal : $y = x^2 - 2x + 7$, $dy = (2x-2)dx$, $\frac{1}{2}dy = (x-1)dx$

$$= \frac{1}{2}\int \csc^4 y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\csc^2 y\,ctg\,y}{3} + \frac{2}{3}\int \csc^2 y\,dy\right)$$

$$= \frac{-1}{6}\csc^2 y\,ctg\,y + \frac{1}{3}(-ctg\,y) + C$$

$$= -\frac{1}{6}\csc^2(x^2-2x+7)\,ctg(x^2-2x+7) - \frac{1}{3}ctg(x^2-2x+7) + C$$

BAB 5

INTEGRAL FUNGSI IRASIONAL

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx \;; a \neq 0$$

- Fungsi Irasional adalah fungsi yang berbentuk akar

Tipe :

1. Dimisalkan
2. Digambar dalam $\angle$
3. Diferensial

Kasus : $D > 0$ dan $a > 0$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \sqrt{1 - ■^2}\, dx$$

Misal : ■ $=$ sin t

Contoh :

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \sqrt{-(x^2 + 6x - 16)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{-((x+3)^2 - 25)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{25 - (x+3)^2}\, dx$$

$$= \int \sqrt{25\left(1 - \left(\frac{x+3}{5}\right)^2\right)}\, dx$$

Misal :

$$\frac{x+3}{5} = \sin t$$

$$x = 5\sin t - 3 \rightarrow dx = 5\cos t\, dt$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{-x^2-6x+16}}{5}$$

$$\sin t = \frac{x+3}{5}$$

$$\int \sqrt{-x^2-6x+16}\, dx$$

$$= 5\int \sqrt{1-\sin^2 t}\,.\,5\cos t\, dt$$

$$= 25\int \cos^2 t\, dx$$

$$= 25\left(\frac{\sin t\cos t}{2} + \frac{1}{2}\int \cos t\, dt\right)$$

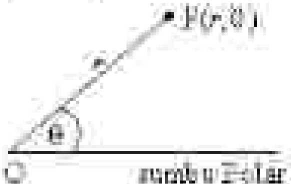
$$= \frac{25}{2}\sin t\cos t + \frac{25}{2}t + C$$

$$= \frac{25}{2}\left(\frac{x+3}{5}\right)\frac{\sqrt{-x^2-6x+16}}{5} + \frac{25}{2}\,\mathrm{arc.sin}\left(\frac{x+3}{5}\right) + C$$

BAB 6

SUMBU POLAR

Suatu titik P di bidang Cartesius dapat dinyatakan dalam koordinat polar atau koordinat kutub dimana r merupakan jarak dari titik O (asal) ke P dan sudut



antara sumbu Polar dengan garis OP

Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

Misalkan titik asal O dan sumbu Polar (koordinat Polar) dihimpitkan dengan titik asal O dan sumbu-X (koordinat Cartesius), maka sebuah titik P dinyatakan baik dalam koordinat Polar maupun koordinat

Cartesius

Hubungan x, y, r dan

x = r cos θ, $\quad r^2 = x^2 + y^2$

y = r sin θ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$ atau = $arc\tan\frac{y}{x}$

Contoh 1. Apabila dibentuk kedalam koordinat polar maka

Jawab: x = r cos θ y = r sin θ

$f(x) = x^2 + y^2$

$= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$

$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= r^2 = g(r,\theta)$

Luas daerah dengan koordinat polar rumus luas daerah yang dibatasi kurva dalam persamaan polar, kita perlu menggunakan rumus luas sektor juring dari suatu lingkaran dengan jari-jari r, yaitu

L = ½ r ^2 θ
dengan θ adalah sudut pusat yang diukur dalam radian. Rumus ini didapat dari fakta bahwa luas sektor juring lingkaran adalah sebanding dengan sudut pusatnya.

Misalkan D adalah daerah yang dibatasi kurva polar r

$= f(\theta)$ dan oleh dua garis $0 \le b - a \le 2\pi = a$ dan $\theta = b$, dimana f adalah kontinu dan tak negatif serta $0 \le b - a \le 2\pi$

Kita membagi selang $[a, b]$ menjadi n anak selang yang sama panjang, dengan titik-titik ujung $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$, dan panjang masing-masing anak selang adalah $\Delta\theta$.

Dengan demikian, daerah D juga terbagi menjadi n daerah bagian, yang masing-masing memiliki sudut pusat $\Delta\theta$.

Kita pilih $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. Jika ΔL_i menyatakan luas daerah bagian ke-i, maka daerah ini dapat dihampiri dengan luas juring lingkaran dengan jari-jari $f(\theta_i^*)$ dan sudut pusat $\Delta\theta$, yaitu

$$\Delta L_i = \frac{1}{2}\left(f\left(\theta_i^*\right)\right)^2 \Delta\theta$$

Sehingga hampiran untuk total luas daerah D adalah

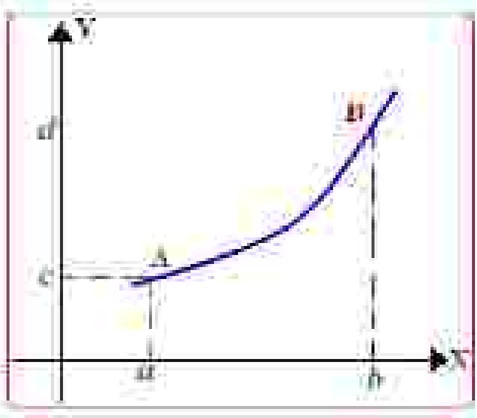
$$L \approx \int_a^b \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Perhatikan bahwa jumlah di atas adalah sebuah jumlah Riemann, dan nilai hampiran akan semakin mendekati luas daerah D jika $n \to \infty$

$$L = \int_a^b \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Akhirnya, kita peroleh rumus untuk menentukan luas daerah D sebagai berikut

Mencari Panjang Busur



BAB 7

TITIK BERAT/ TITIK PUSAT MASSA (*Centroid*)

Konsep :

Seimbang:

$w_1 d_1 = w_2 d_2 \rightarrow m_1 g d_1 = m_2 g d_2 \rightarrow m_1 d_1 = m_2 d_2$

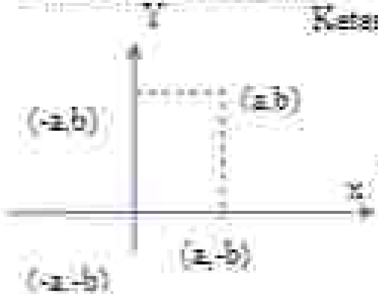
Pada diagram kartesius:

$$m_1 d_1 = m_2 d_2$$
$$m_1(-d_1) = m_2 d_2$$
$$m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0$$

Jarak selalu bernilai positif

MOMENT (M)

Perkalian massa dengan jarak berarah (masuk dalam sistem koordinat)



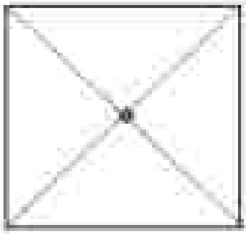
Keterangan:

$M_x = m \cdot b$

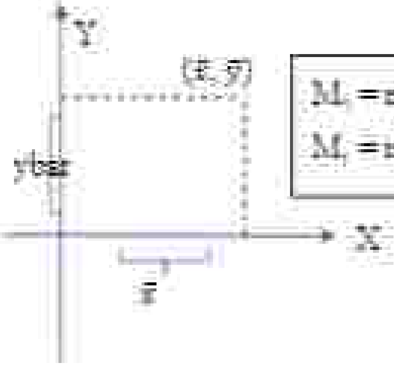
$M_y = m \cdot a$

Moment bidang datar : $m = \rho . L$
Moment benda putar: $m = \rho . v$
dengan $\rho = kg/m^2$ atau $\rho = g/m^2$ dan diasumsikan bahwa $\rho = 1$, sehingga:
Moment bidang datar : $m = L$
Moment benda putar: $m = v$
Ket: moment pada bidang datar maupun benda putar bersifat homogen karena ρ bernilai 1 sehingga ρ dikatakan konstan.

HUBUNGAN MOMENT DENGAN TITIK BERAT



- Titik beratnya merupakan perpotongan diagonalnya (centroid) sehingga titik berartnya berada pada $(\bar{x}, \bar{y})$



$$M_x = m.\,\bar{y} \rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$
$$M_y = m.\,\bar{x} \rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

MENCARI TITIK BERAT

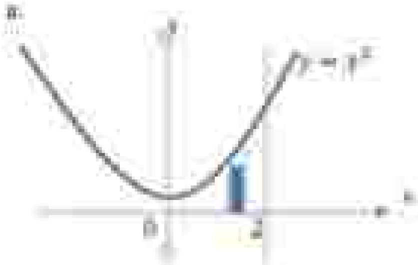
Untuk mencari L/V dengan menggunakan integral model standar atau cincin

a. Bidang datar $\bar{y} = \frac{Mx}{L}$ $\quad \bar{x} = \frac{My}{L}$

b. Benda putar $\bar{y} = \frac{Mx}{V}$ $\quad \bar{x} = \frac{My}{V}$

CONTOH SOAL

1. Carilah titik berat bidang datar yang dibatasi $y = x^2 ; x = 2$ dari sumbu x



Jawab :

$L = y_{atas} - y_{bawah} \cdot lebar$

$= \int_0^2 (x^2 - 0) \cdot dx$

$= \int_0^2 x^2 \cdot dx$

$= \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^2$

$= \frac{8}{3}$

$M_y = \int_0^2 (x - 0)(x^2 - 0) \cdot dx$

$= \int_0^2 x^3 \; dx$

$= \frac{1}{4} x^4 \Big]_0^2 = 4$

$M_x = \int_0^2 \frac{1}{2} (x^2 + 0)(x^2 - 0) \cdot dx = = \frac{1}{2} \int_0^2 x^4 \; dx$

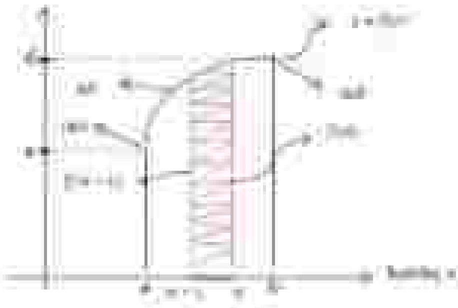
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big]_0^2 = 3\frac{1}{5}$

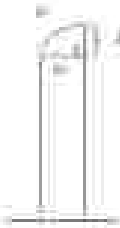
sehingga titik berat : $\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right)$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{32}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{5}$$

PANJANG KURVA





$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$(\Delta s_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}$$

$$\boxed{s = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{dx^2 + (dy)^2}}$$

$$S = \int_a^b \sqrt{dx^2 + \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

Andika & Keto 85

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \qquad \textbf{Sumbu x}$$

$$S = \int_c^d \sqrt{dy^2 \left(\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right)}$$

$$S = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \cdot dy \qquad \textbf{Sumbu y}$$

Contoh !

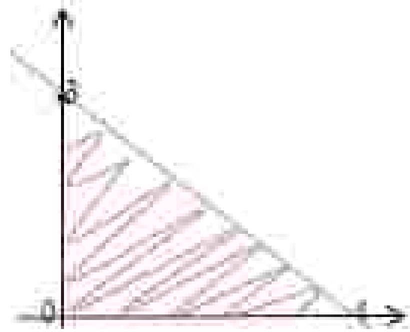
A adalah bidang datar yang dibatasi oleh $3x + 4y - 12 = 0$ da terletak di kuadrat I.

a. Gambar daerah A

b. Tentukan Panjang kurva

Jawab :

a.



$3x + 4y - 12 = 0 \qquad 3dx = -4dy \quad : (-4)$

$3dx + 4dy = 0 \qquad \frac{-3}{4} dx = dy \quad : dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{4} ; \frac{dx}{dy} \qquad \frac{-3}{4} = \frac{dy}{dx}$

$$phytagoras = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \bullet dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{16}} \bullet dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{\frac{25}{16}} \bullet dx$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \bullet dy$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{\frac{16}{9} + 1} \bullet dy$$

$$S = \int_0^3 \sqrt{\frac{25}{9}} \bullet dy$$

BAB 8

DIGRAM POLAR

A. SISTEM KOORDINAT POLAR

Dua orang Perancis, yaitu Pierre de Fermat (1601-1665) dan Rene Descrates (1596-1650), memperkenalkan apa yang kita sebut sistem koordinat Cartesius atau persegi panjang. Dasar pemikiran mereka ialah untuk merinci setiap titik P di bidang dengan jalan memberikan dua bilangan (x,y), jarak berarah dari sepasang sumbu yang tegak lurus dengan sesamanya. Gagasan ini sampai sekarang demikian umumnya sehingga kita menggunakannya hampir tanpa berpikir. Namun ini adalah gagasan mendasar dalam geometri analitis dan memungkinkan pengembangan kalkulus seperti yang kita capai hingga saat ini.

Pemberian jarak berarah dari sepasang sumbu yang tegak lurus bukanlah satu-satunya jalan untuk merinci suatu titik. Cara lain untuk melakukan ini adalah dengan memberikan apa yang disebut koordinat polar.

Koordinat polar dimulai dengan sebuah setengah garis tetap, disebut sumbu polar, memancar dari sebuah titik tetap O, disebut polar atau titik asal (lihat gambar 2). Sumbu polar dipilih horizontal dan mengarah ke kanan dan oleh sebab itu sumbu ini dapat disamakan dengan sumbu x-positif pada sebuah koordinat siku – siku. Sebarang titik P (salam polar) adalah perpotongan anatar sebuah lingkaran tunggal yang berpusat di O dan sebuah sinar tunggal yang memancar dari O. Jika r adalah jari-jari lingkaran dan Θ adalah salah satu sudut antara sinar dan sumbu polar, maka (r,Θ) adalah sepasang koordinat polar untuk P.

Dalam koordinat polar, r negatif menyatakan bahwa sinar yang berlawanan dari sisi akhir Θ dan |r| satuan dari titik asal. Contoh-contoh dari persamaan polar adalah $r = 8 \sin \Theta$ dan $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$. Persamaan polar dapat dibuat dalam bentuk grafik persamaan polar dimana grafik persamaan polar adalah himpunan titik-titik, masing-masing mempunyai paling sedikit sepasang koordinat polar yang memenuhi persamaan polar tersebut.

Cara yang paling mendasar untuk memsketsakan grafik ialah menyusun tabel nilai – nilai, plot titik – titik yang berpadanan, kemudian menghubungkan titik-titik ini dengan kurva mulus.

Hubungan Koordinat Cartesius Kita andaikan bahwa sumbu polar berimpit dengan sumbu x-positif sistem Cartesius. Maka koordinat polar (r,Θ) sebuah titik P dan koordinat Cartesius (x,y) titik yang sama itu dihubungkan oleh persamaan

Polar ke Cartesius

$x = r \cos \theta$

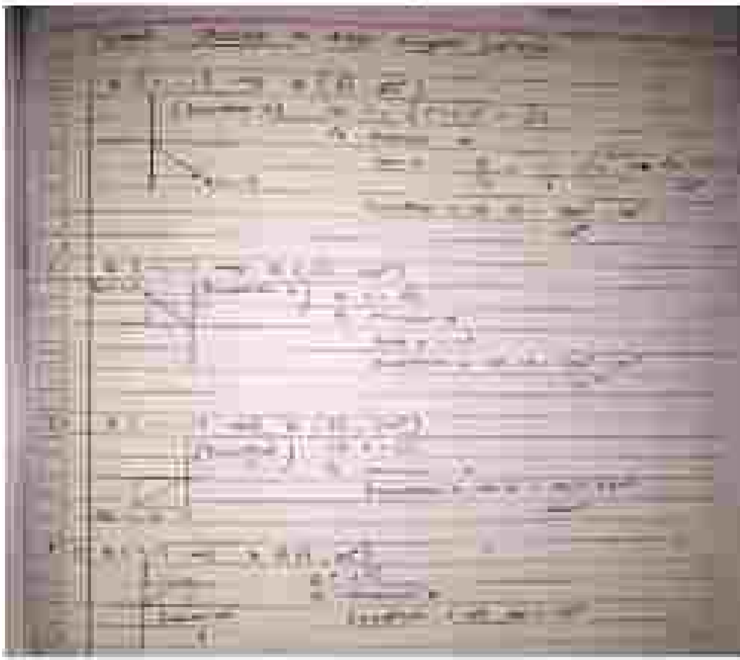
$y = r \sin \theta$

Cartesius ke Polar

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$

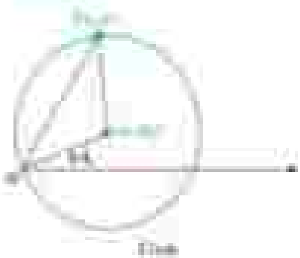
Contoh : Ubahlah ke dalam diagram kartesius :



Persamaan Polar untuk Garis, Lingkaran, dan Konik

Jika sebuah garis melalui polar, persamaannya adalah $\theta = \theta_0$. Apabila garis tidak melalui polar, maka garis tersebut berjarak misalnya d dari kutub ($d > 0$). Andaikan θ_0 sudut antara sumbu polar dan garis tegaklurus dari polar pada garis itu (*Figure 9*). Apabila $P(r, \theta)$ sebuah titik pada garis, maka $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{d}{r}$, atau Apabila sebuah lingkaran dengan jari-jari a berpusat di polar, persamaannya adalah r = a.

Figure 9



Apabila pusatnya di (r_0, θ_0), persamaannya agak rumit, kecuali kalau

$$Garis: r = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

kita pilih $r_0 = a$ (Figure 10). Maka menurut hukum kosinus, $a^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta - \theta_0)$ yang dapat disederhanakan menjadi

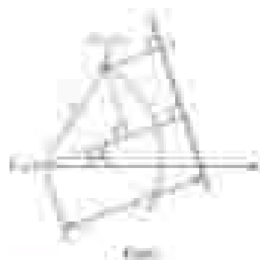
$$Lingkaran: r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$$

Suatu hal yang menarik jika $\theta_0 = 0$ dan $\theta_0 = \pi/2$. Yang pertama menghasilkan persamaan $r = 2a\cos\theta$; yang kedua menghasilkan $r = 2a\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ atau $r = 2a\sin\theta$. Persamaan terakhir hendaknya dibandingkan dengan contoh 1.
Akhirnya kalau sebuah konik (elips, parabol, atau hiperbol) diletakkan sedemikian hingga fokusnya berada di polar, garis arahnya berjarak d satuan dari kutub (Figure 11), maka dengan menggunakan definisi konik, yaitu $|PF| = e|PL|$ kita akan memperoleh

$$r = e[d - r\cos(\theta - \theta_0)]$$

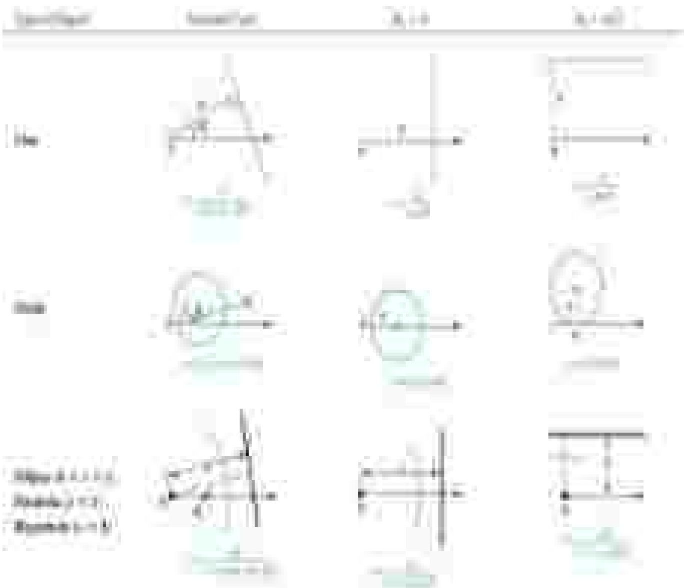
Atau, secara analitik setara

$$Konik: r = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$



Ada lagi kasus yang menarik, yaitu untuk $\theta_0 = 0$ dan $\theta_0 = \pi/2$. Perhatikan bahwa apabila $e = 1$ dan $\theta_0 = 0$.

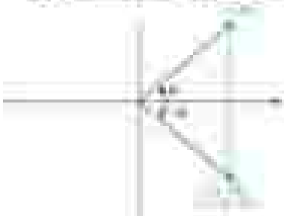
Berikut disajikan dalam tabel ringkasan dari persamaan polar.



B. GRAFIK PERSAMAAN POLAR

Persamaan polar yang ditinjau dalam sebelumnya menuju ke grafik-grafik yang dikenal, terutama garis, lingkaran, dan konik. Sekarang kita mengalihkan perhatian kita pada grafik-grafik yang lebih eksotis – kardioida, limason, lemniskat, mawar, dan spiral. Persamaan-persamaan Cartesius padanannya agak rumit. Beberapa kurva memiliki persamaan sederhana dalam suatu system; kurva-kurva ini memiliki persamaan sederhana dalam system yang kedua. Sifat simetri dapat membantu kita memahami sebuah grafik. Berikut beberapa uji yang cukup untuk kesimetrian dalam koordinat polar. Diagram-diagram akan membantu Anda mengembangkan validitas mereka.

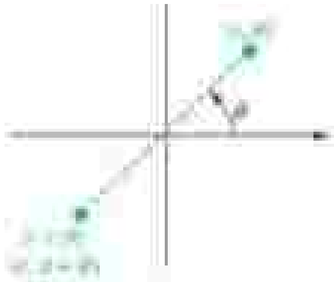
1. Grafik persamaan polar simetri terhadap sumbu-x (sumbu polar) jika penggantian (r, θ) atau oleh $(-r, \pi - \theta)$ menghasilkan persamaan yang ekuivalen.



2. Grafik persamaan polar simetri terhadap sumbu-y (gari θ s = $\pi/2$) jika penggantian (r, θ) oleh $(-r, -\theta)$ atau oleh $(r, \pi - \theta)$ menghasilkan persamaan ekuivalen.

3. Grafik persamaan polar simetris terhadap titik asal (polar), jika pengganti (r, θ) oleh $(-r, \theta)$

atau oleh (r, π − θ) menghasilkan persamaan yang ekuivalen.

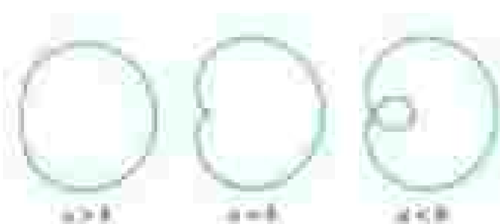


Karena pernyataan ganda titik-titik di dalam koordinat polar, maka mungkin terdapat simetri-simetri yang tidak teridentifikasi oleh katiga tes ini.

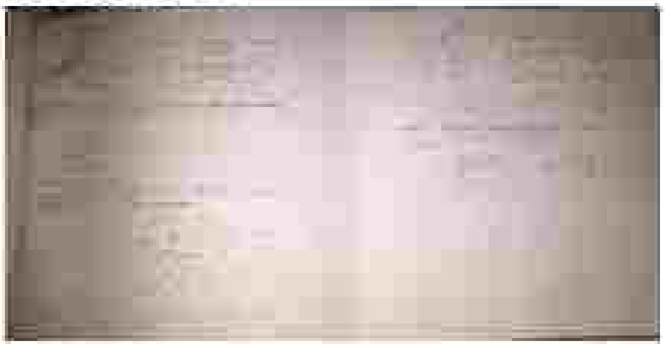
Kardioida dan Limason kita tinjau persamaan yang berbentuk:

$r = a \pm b \cos \theta \qquad r = a \pm b \sin \theta$

dengan a dan b positif. Grafik mereka dinamakan **limason**, dengan khusus untuk a = b disebut sebagai **kardioda**.

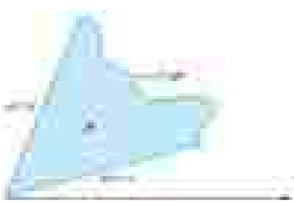


C. SUMBU POLAR



D. KALKULUS DALAM KOORDINAT POLAR

Luas dalam Koordinat Polar Untuk memulai,misalkan $r = f(\theta)$ menentukan sebuah kurva di bidang,dengan f fungsi kontinu, tak-negatif untuk $\alpha \le \theta \le \beta$ dan $\beta - \alpha \le 2\pi$. Kurva-kurva $r = f(\theta), \theta = \alpha$, dan $\theta = \beta$ membatasi daerah R (yang diperlihatkan di bagian kiri dalam di bawah),yang luasnya $A(R)$ ingin kita temukan.



Partisikan interval $[\alpha, \beta]$ menjadi n interval bagian menggunakan sarana bilangan-bilangan $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$ dengan demikian mengiris daerah R menjadi n daerah berbentuk kue yang lebih kecil,yaitu $R_1, R_2, \ldots, R_n$, seperti diperlihatkan dalam paruhan kanan Gambar di atas.Jelas $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + \cdots + A(R_n)$.

Kita aproksimasi luas irisan ke-I, $A(R_1)$; kenyataannya kita melakukannya dalam dua cara. Pada interval ke-I $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ misalkan f mencapai nilai minimumnya dan nilai maksimumnya masing-masing di u_i dan v_i (Gambar 3). Jadi jika $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$,

$$\frac{1}{2}[f(u_i)]^2 \Delta\theta_i \le A(R_i) \le \frac{1}{2}[f(v_i)]^2 \Delta\theta_i$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(u_i)]^2 \Delta\theta_i \le \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(v_i)]^2 \Delta\theta_i$$

Anggota pertama dan ketiga pertidaksamaan ini adalah jumlah Riemann untuk integral yang sama $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$. Ketika norma pastisi kita biarkan menuju nol,kita peroleh (dengan menggunakan Teorema Apit) rumus luas

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [(f(\theta)]^2 d\theta$$

Garis Singgung dalam Koordinat Polar

Dalam koordinat Cartesius, kemiringan m dari garis singgung pada suatu kurva diberikan oleh m = dy/dx. Dengan cepat kita menolak $dy/d\theta$ sebagai rumus kemiringan yang berpadanan dalam koordinat polar.

Lebih baik Jika r = f (θ) menentukan kurva , kita tuliskan :

y = r sin θ = f (θ) sin θ

x = r cos θ = f (θ) cos θ

jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/\Delta\theta}{\Delta x/\Delta\theta} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

Yakni,

$$m = \frac{f'(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta}{-f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta}$$

Rumus yang baru saja diturunkan menjadi sederhana jika grafik $r = f\theta$ () melalui polar. Sebagai contoh, andaikan untuk sudut α, $r = f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) = 0$. Maka (di polar tersebut) rumus kita untuk m adalah

$$m = \frac{f'(\alpha)\sin\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Karena garis = α juga memiliki kemiringan tan α, kita simpulkan bahwa garis ini menyinggung kurva di polar. Kita memutuskan fakta yang berguna bahwa garis – garis singgung di titik polar dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan f (θ) = 0.

DAFTAR PUSTAKA

Dale Varberg, Edwin Purcell, Steve Rigdon. 2016. Calculus, 9th edition, Pearson.

George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Varberg,dkk.2011.Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid 2.Jakarta:Erlangga

R.Hass. 2017. Kalkulus Thomas Jilid 1, edisi 13, Erlangga.

Stewart, James. 2001. Kalkulus. Jakarta: Erlangga

Tentang Penulis

Andika Setyo Budi Lestari adalah seorang dosen di Universitas PGRI Wiranegara Pasuruan. Selain sebagai dosen juga sebagai peneliti dan penulis. Penelitian yang dilakukan ada beberapa yang mendapat sponsor dan didanai sendiri. Penulis juga aktif menulis artikel pada jurnal nasional maupun internasional bereputasi terindek Scopus. Saat ini penulis sebagai dosen di Prodi Pendidikan Matematika di Universitas PGRI Wiranegara Pasuruan. Salah satu mata kuliah yang diampu adalah Kalkulus Integral.

CV Jejak akan terus bertransformasi untuk menjadi media penerbitan dengan visi memajukan dunia literasi di Indonesia. Kami menerima berbagai naskah untuk diterbitkan.

Silakan kunjungi *web* **jejakpublisher.com** untuk info lebih lanjut

---

UNIVERSITAS PGRI WIRANEGARA (UNIWARA)

SK KEMENDIKBUD RI. NO. 259/M/2020

BIDANG PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

(BP2M)

Jl. Ki Hajar Dewantara 27 – 29 PasuruanTelp. (0343) 421948 Fax. (0343) 411086 univ.pgriwiranegara@gmail.com Web. www.uniwara.ac.id

Program Pasca Sarjana
Magister Pend. Ekonomi

Fakultas Pedagogi & Psikologi
Pend. Bhs &Sastra Indonesia
Pend. Bhs Inggris
Pend. Ekonomi
Pend. Matematika
Pend. PKn

Fakultas Teknologi & Sains
Teknik Industri
Ilmu Komputer
Teknologi Pangan

SURAT KETERANGAN

No. 113/UNIWARA.3/LT/2022

Yang bertanda tangan di bawah ini :
Nama : Badriyah Wulandari, M.A
NIDN : 0717128802
Jabatan : Kepala Bidang Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Unit Kerja : Universitas PGRI Wiranegara

Menerangkan bahwa :
Nama : Dr. Andika Setyo Budi Lestari, M. Pd.
NIDN : 0727028603
Jabatan : Dosen Pendidikan Matematika
Unit Kerja : Universitas PGRI Wiranegara

Telah mempublikasi hasil penelitian sesuai data di bawah ini

No	Judul Penelitian	Publikasi Ilmiah
1.	Apakah Keaktifan Siswa Dapat Ditingkatkan Melalu Pembelajaran Kooperatif Dengan Metode Guided Discovery Learning?	https://journal.uhamka.ac.id/index.php/ijopme/issue/view/371

Pasuruan, 6 Agustus 2022
Kepala BP2M,

Badriyah Wulandari, M.A
NIDN. 0717128802