SERI MATERI KULIAH

Aljabar Linear Elementer

Dani Suandi, M.Si.

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

PERMUTASI DAN DEFINISI DETERMINAN MATRIKS

Permutasi dan Definisi Determinan Matriks

Permutasi → susunan yang mungkin dibuat menurut suatu aturan dengan memperhatikan urutan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan.

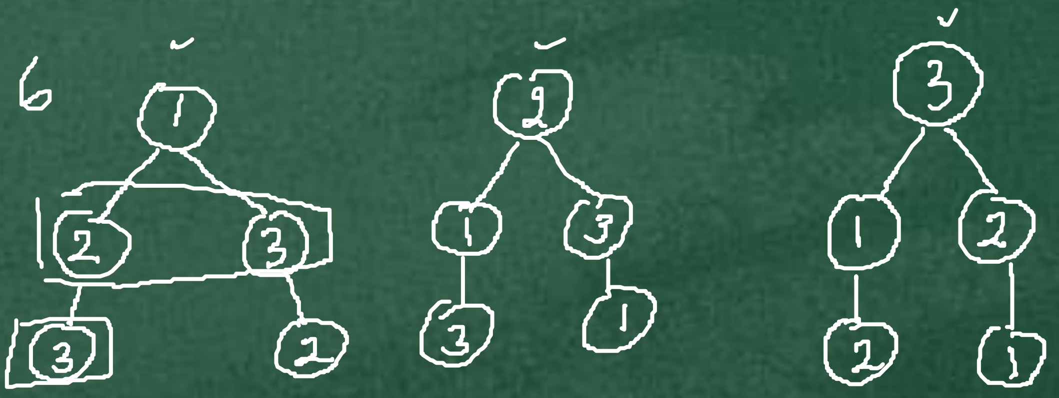
$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\{1, 2, 3, 4\}$

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Contoh :

Permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ adalah

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)



(1, 2, 3). (1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,1,2) (3,2,1)

Inversi dalam Permutasi

→Jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan permutasi.

Permutasi Genap ← Jumlah invers adalah bil. genap

Permutasi Ganjil ← Jumlah invers adalah bil. ganjil

Contoh :

Jumlah invers pada permutasi dari $\{1, 2, 3\}$

$(1,2,3) \rightarrow 0 + 0 = 0 \rightarrow$ genap

$(1,3,2) \rightarrow 0 + 1 = 1 \rightarrow$ ganjil

$(2,1,3) \rightarrow 1 + 0 = 1 \rightarrow$ ganjil

$(2,3,1) \rightarrow 1 + 1 = 2 \rightarrow$ genap

$(3,1,2) \rightarrow 2 + 0 = 2 \rightarrow$ genap

$(3,2,1) \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow$ ganjil

Definisi Determinan Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- Hasil kali elementer A → hasilkali n buah unsur A tanpa ada pengambilan unsur dari baris/kolom yang sama.
- **Contoh :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- Ada 6 (3!) hasil kali elementer dari matriks A, yaitu:

$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$,

$a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$

Hasil kali elementer bertanda

$+ a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ (1, 2, 3) = 0 + 0 = 0

$- a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$ (1, 3, 2) = 1

$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ (2, 3, 1) = 1+1 = 2

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ (3, 1, 2) = 2

$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$ + (3, 2, 1) = 2 + 1 = 3

det (A)

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom,
yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

Jadi, Misalkan $A_{n\times n}$ maka determinan dari matriks A didefinisikan **sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda matriks tersebut.**

Notasi : det(A) atau |A|

Contoh :

Tentukan Determinan matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Jawab :

Menurut definisi :

$$det(A_{3x3}) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

atau

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Contoh :

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right.$$

$$= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1)$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

Terimakasih