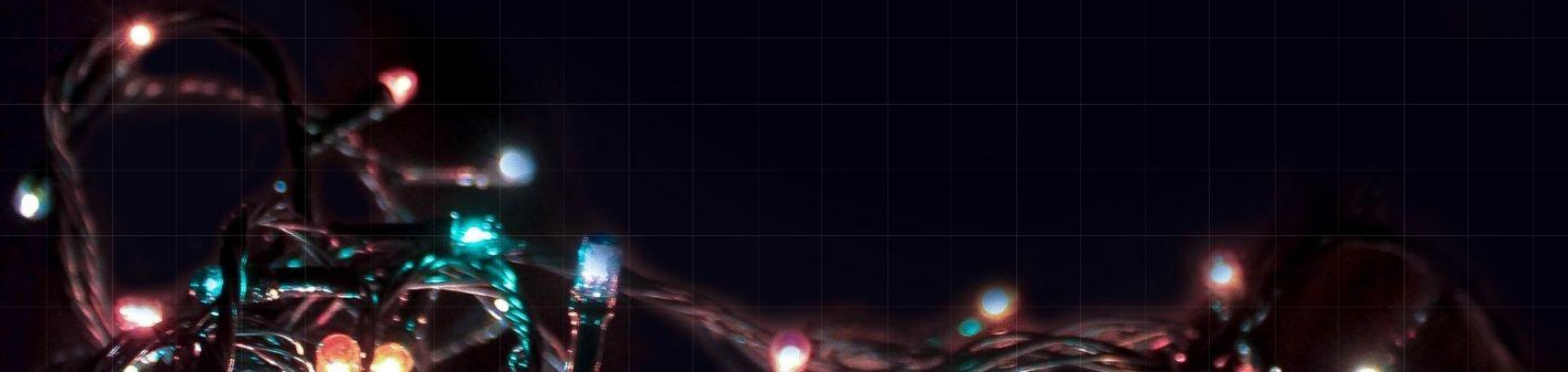
SERI MATERI KULIAH

Aljabar Linear Elementer

Dani Suandi, M.Si.

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

SISTEM PERSAMAAN LINEAR HOMOGEN



Sistem Persamaan Linear Homogen

Bentuk umum

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$A X = \vec{0}$

$\Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} \cdot \vec{0}$

$X = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \cdot 0$

$\det(A) \neq 0$

- SPL homogen merupakan SPL yang konsisten, ➔ selalu mempunyai solusi.
- Solusi SPL homogen dikatakan tunggal

  jika solusi itu adalah $\{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}$
- Jika tidak demikian,

  SPL homogen mempunyai solusi tak hingga banyak.

  (biasanya ditulis dalam bentuk parameter) $\Rightarrow$ misalkan sebagai parameter.

Contoh :

Tentukan solusi SPL homogen berikut

$$
\begin{aligned}
2p + q - 2r - 2s &= 0 \\
p - q + 2r - s &= 0 \\
-p + 2q - 4r + s &= 0 \\
3p - 3s &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0$$

SPL dapat ditulis dalam bentuk

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

OBE

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$p - s = 0$

$q - 2r = 0$

misalkan

$r = a$

$s = b$

maka solusi

$p = b$

$q = 2a$

$r = a$

$s = b$ } parameter.

Maka solusi SPL homogen adalah :

$p = a,$ $\quad r = b$

$q = 2b\,,$ $\quad s = a$

$s = a,$ dan

$r = b,$

dimana a, b merupakan parameter.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b$$

Contoh :

Diketahui SPL

$$\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan *b* agar SPL memiliki solusi tak hingga banyak

b. Tuliskan solusi SPL tersebut

Jawab :

Solusi suatu SPL homogen adalah tak tunggal jika *det*(A) = 0.

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-b)\begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-b)\ ((1-b)(1-b)-1) = 0$$

$$(-b)\ (b^2 - 2b + \cancel{1} - \cancel{1}) = 0$$

$$(-b)\ (b^2 - 2b) = 0$$

$b = 0$ atau $b = 2$

Solusi SPL tak hingga banyak saat $b = 0$ atau $b = 2$

- Saat $b = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-b_2+b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y+z &= 0 \\ y &= -z \\ y &= -q \end{aligned}$$

Misalkan p,q adalah parameter Riil, maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

- Saat $b = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{-b_2+b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = 0$

$y - z = 0$

$z = q$

$y = z$

$y = q$

Misalkan q adalah parameter Riil, maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

Terimakasih