

SERI MATERI KULIAH

Aljabar Linear Elementer

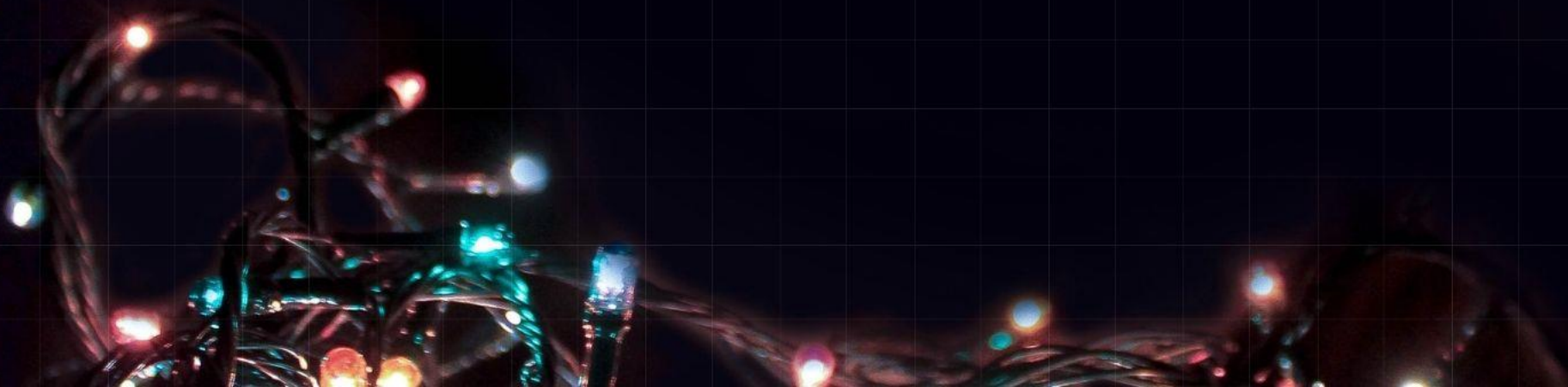


Dani Suandi, M.Si.



ALJABAR LINEAR ELEMENTER

HASIL KALI TITIK (DOT PRODUCT)



Perkalian antara dua vektor

- Hasil kali titik (*dot product*)
- Hasil kali silang (*cross product*)

Hasil kali titik (*dot product*)

→ Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang yang sama** yang menghasilkan skalar

Hasil kali silang (*Cross product*)

→ Hasil kali silang merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang \mathbf{R}^3** yang menghasilkan vektor

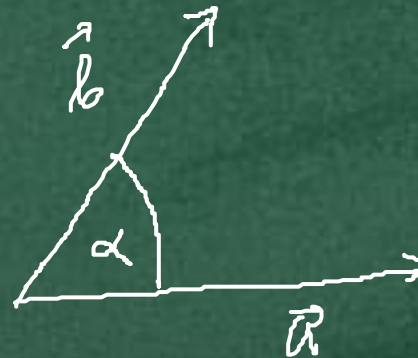
Dot Product

Misalkan \vec{a} , \vec{b}

adalah vektor pada ruang yang sama

maka hasil kali titik antara dua vektor :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$



dimana

$\|\vec{a}\|$: panjang

$\|\vec{b}\|$: panjang

α : sudut keduanya

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

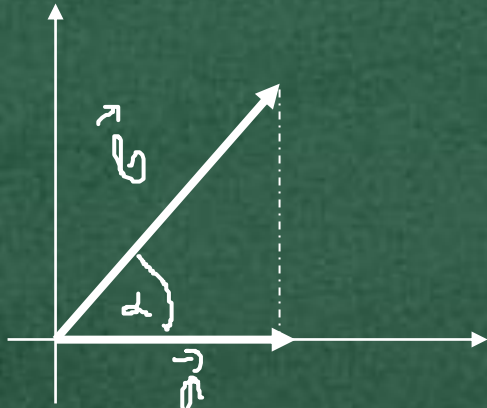
Contoh 2 :

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor

$$\vec{a} = 2\hat{i} \quad \text{dan} \quad \vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} \quad \text{jika} \quad \tan \alpha = 1$$

$$\vec{a} = (2, 0) \quad ; \quad \alpha = 45^\circ$$
$$\vec{b} = (2, 2)$$

Jawab :



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

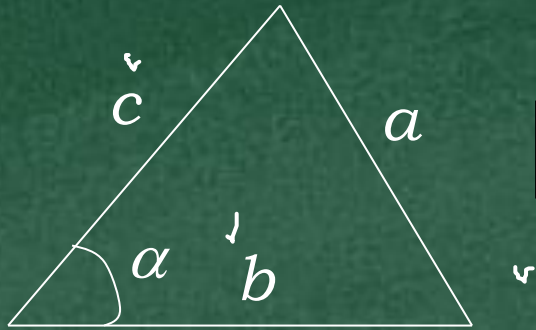
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 0^2}$$
$$= 2$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Karena $\tan \alpha = 1$, artinya $\alpha = 45^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$
$$= 2\sqrt{8} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 4$$

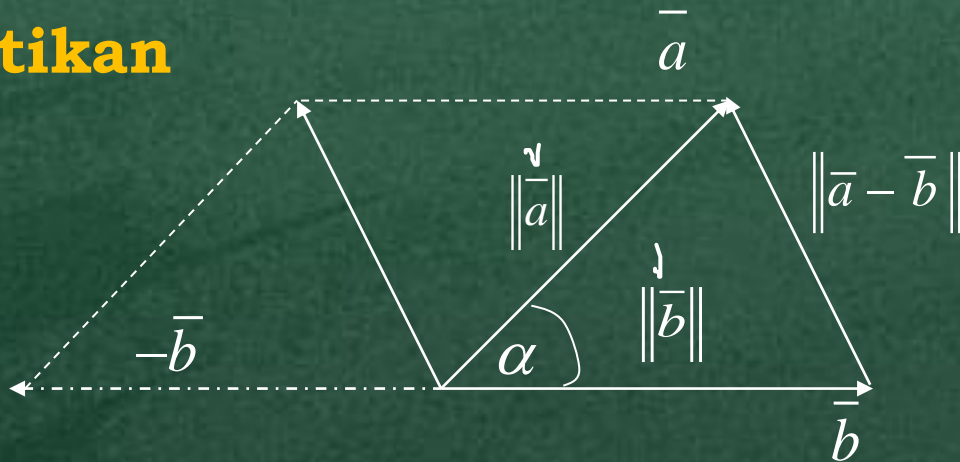
Ingat aturan cosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

Perhatikan



$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

$$2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b} - \vec{a}\|^2$$

Selanjutnya dapat ditulis

$$\underbrace{\|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha}_{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \|\bar{b} - \bar{a}\|^2}_{\phantom{\bar{a} \cdot \bar{b}}} \right]$$

Ingat bahwa :

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

2. $\|\bar{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

3. $\|\bar{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$

4. $\|\bar{b} - \bar{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2$
 $= b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$
 $- 2b_1 a_1 - 2b_2 a_2 - \dots - 2b_n a_n$

Perhatikan setiap sukunya, diperoleh hubungan :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad \checkmark$$

Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor pada

contoh sebelumnya $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= 2(2) + 0(2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= (2, 1, 1) \\ \vec{b} &= (3, 0, -1) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ &= 6 + 0 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Beberapa sifat hasil kali titik :

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$
3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$, dimana $k \in R$

Terimakasih