SERI MATERI KULIAH

Aljabar Linear Elementer

Dani Suandi, M.Si.

ALJABAR LINEAR ELEMENTER

OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh : OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \; b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama (b_1) ditukar dengan baris ke-2 (b_2)

OBE ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{4}\, b_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Baris pertama (b_1) dengan bilangan ¼

$$\begin{array}{rcrrrr} -2b_1 & : & -2 & 2 & 0 & 2 \\ b_3 & : & 2 & -1 & 1 & 3 \; + \\ \hline & & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

OBE ke-3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \underline{b_3 - 2b_1} \\ -2b_1 + b_3 \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

✓ 1. $\leftrightarrow$ tukar baris

2. $k\,b_i$; $k \neq 0$

3. $a\,b_i + b_j$, $a \neq 0$

Perkalian (−2) dengan b_1 lalu tambahkan pada baris ke-3 (b_3)

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing.
- Bilangan 1 (pada baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

Sifat matriks hasil OBE

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{OBE} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esolon baris

Matriks dinamakan esilon baris jika memenuhi sifat 1, 2, dan 3

Matriks dinamakan esilon baris tereduksi jika memenuhi semua sifat

Contoh :

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2y + z &= 7 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 4$$

$-2b_1 + b_3$

OBE

Solusi:

$-2b_1 = -2 \quad 2 \quad 0 \quad 2$

$b_3 = 2 \quad -1 \quad 1 \quad 3$ +

$0 \quad 1 \quad 1 \quad 5$

Jawab :

$$A \quad \underset{-2b_1 + b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \underset{b_2 \leftrightarrow b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$-2b_2 + b_3$

$-2b_2 : 0 \quad -2 \quad -2 \quad -10$

$b_3 : 0 \quad 2 \quad 1 \quad 7$ +

$0 \quad 0 \quad -1 \quad -3$

$$\underset{-2b_2 + b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \underset{-b_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$-1b_3 + b_2 \Rightarrow -b_3 : 0 \quad 0 \quad -1 \quad -3$

$b_2 : 0 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \; +$

$\quad\;\; 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2$

$b_2 + b_1$

$$-b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad -b_3 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Perhatikan hasil OBE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Setiap baris mempunyai satu utama.
- Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom
- Kolom 4 tidak mempunyai satu utama

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Terimakasih